3. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

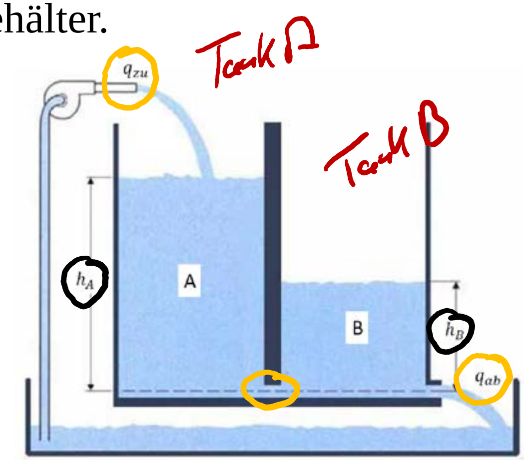
Linearisierung, Zustandsraum-Darstellung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Tankbehälter

Gegeben ist der folgende Tankbehälter.



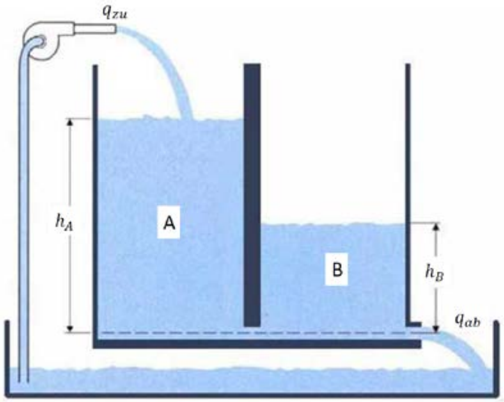
Er besteht aus den beiden baugleichen Zylindersäulen ***A*** und ***B*** mit einem konstanten Querschnitt Q. Der Behälter ***A*** wird durch den Zufluss q_{zu} gespeist und der Tankinhalt aus Behälter ***B*** fließt mit dem Volumenstrom q_{ab} ab. Die beiden zeitabhängigen Füllstände der Wassersäulen werden mit $h_A(t)$ und $h_B(t)$ bezeichnet.

$Q = \text{konst.}$

$$V = h \cdot Q \implies V(t) = h(t) \cdot Q$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Gegeben ist der folgende Tankbehälter.



Aufgaben:

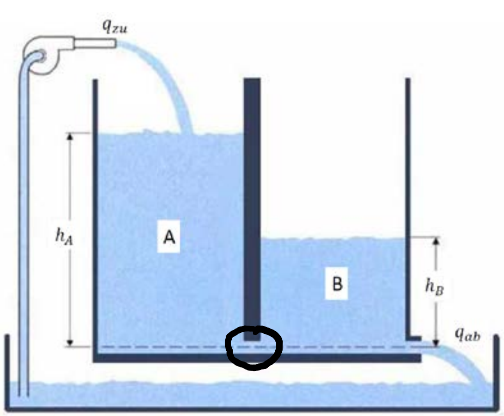
a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

c) Geben Sie das linearisierte System in Form eines Zustandsraums an.

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.



$$q_{ab,A} = q_{zu,B} \qquad q_{ab} = a\sqrt{2gh}$$

$$q_{ab,A} = q_{zu,B} = a\cdot\sqrt{2g\,(h_A(t) - h_B(t))}$$

$$q_{ab,B} = a\sqrt{2g\,h_B(t)}$$

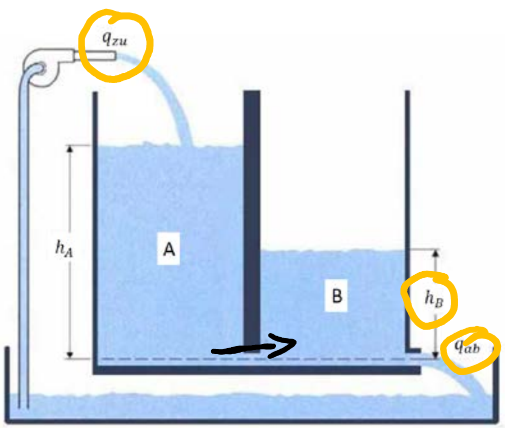
$$Q = \text{konst.} \longrightarrow V(t) = Q\cdot h(t) \longrightarrow \dot{V}(t) = Q\cdot \dot{h}(t)$$

$$\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t) = Q\cdot \dot{h}(t)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\dot{h}(t) = \frac{1}{Q}\left(q_{zu}(t) - q_{ab}(t)\right)}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.



$$\dot{h}_A(t) = \frac{1}{Q}\left[q_{zu} - a\sqrt{2g\left(h_A(t) - h_B(t)\right)}\right] \quad f_1$$

$$\dot{h}_B(t) = \underbrace{\frac{1}{Q}\left[a\sqrt{2g\left(h_A(t) - h_B(t)\right)} - a\sqrt{2g\, h_B(t)}\right]}_{f_2}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$h_{A,0}$, $h_{B,0}$: Ruhelagen

Ruhelage:

$$0 = q_{zu,0} - \sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} \qquad (1)$$

$$0 = \cancel{a}\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} - \cancel{a}\sqrt{2g\,h_{B,0}} \qquad (2)$$

aus (2): $\sqrt{\cancel{2g}(h_{A,0} - h_{B,0})} = \sqrt{\cancel{2g}\,h_{B,0}}$

$$\Leftrightarrow h_{A,0} - h_{B,0} = h_{B,0} \Leftrightarrow \boxed{\tfrac{1}{2} h_{A,0} = h_{B,0}}$$

aus (1): $q_{zu,0}^2 = a^2 2g(h_{A,0} - h_{B,0})$

$$h_{B,0} = h_{A,0} - \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 \cdot g}$$

$$\boxed{h_{A,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{a^2 \cdot g} \qquad h_{B,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g}}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\cancel{\dot{h}_{A,0}}^{\to 0} + \Delta\dot{h}_A = \underbrace{\frac{1}{Q}\left((q_{zu,0}+\Delta q_{zu}) - a\sqrt{2g\left[(h_{A,0}+\Delta h_A)-(h_{B,0}+\Delta h_B)\right]}\right)}_{f_1(x_0+\Delta x)}$$

$$f_1(x)$$

Approximation mit Taylor

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial q_{zu}}\right|_0 = 1$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_A}\right|_0 = -\frac{a\cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0}-h_{B,0})}} = k_{h_A,1}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_B}\right|_0 = +\frac{a\cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0}-h_{B,0})}} = k_{h_B,1}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\Delta \dot{h}_A = \frac{1}{Q}\left[1 \cdot \Delta q_{zu} + K_{h_{A,1}} \cdot \Delta h_A + K_{h_{B,1}} \cdot \Delta h_B\right] \left(+ \underbrace{f(x_0)}_{=0} \right)$$

(in der Ruhelage)

$$= \frac{1}{Q} \Delta q_{zu} + \underbrace{\frac{K_{h_{A,1}}}{Q}}_{K_{A,1}} \cdot \Delta h_A + \underbrace{\frac{K_{h_{A,1}}}{Q}}_{K_{B,1}} \Delta h_B$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_A}\right|_0 = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g\left(h_{A,0} - h_{B,0}\right)}} = K_{h_{A,2}}$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_B}\right|_0 = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g\left(h_{A,0} - h_{B,0}\right)}} - \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g h_{B,0}}} = K_{h_{B,2}}$$

$$\Delta \dot{h}_B = \frac{1}{Q}\left[K_{h_{A,2}} \cdot \Delta h_A + K_{h_{B,2}} \cdot \Delta h_B\right] = \underbrace{\frac{K_{h_{A,2}}}{Q}}_{K_{A,2}} \Delta h_A + \underbrace{\frac{K_{h_{B,2}}}{Q}}_{K_{B,2}} \Delta h_B$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

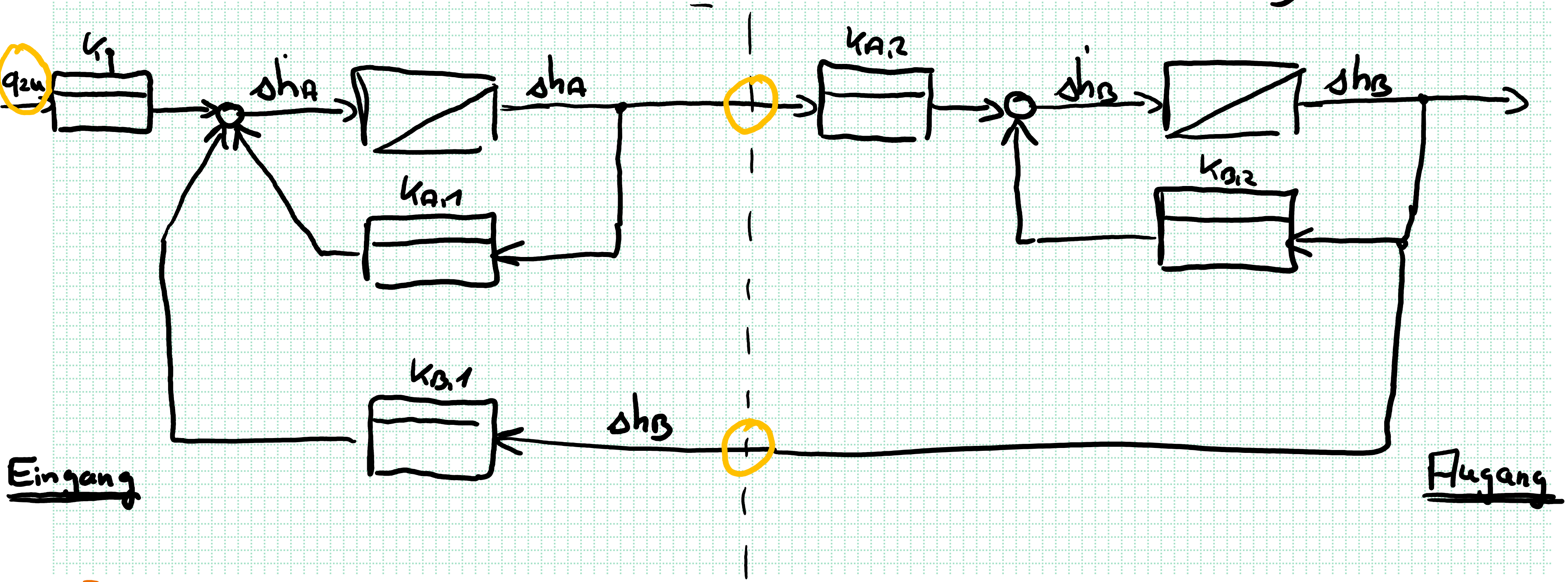
Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

Tank A

$$\Delta\dot{h}_A = k_q \cdot \Delta q_{zu} + k_{A,1}\,\Delta h_A + k_{B,1}\,\Delta h_B$$

Tank B

$$\Delta\dot{h}_B = k_{A,2}\,\Delta h_A + k_{B,2}\,\Delta h_B$$



Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: c) Geben Sie das linearisierte System in Form eines Zustandsraums an.

Zustandsraum: (linear)

$$\dot{x} = A \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zustandsvektor}}}{x} + B \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eingangsvektor}}}{u}$$

$$x = \begin{pmatrix} \Delta h_A \\ \Delta h_B \end{pmatrix}$$

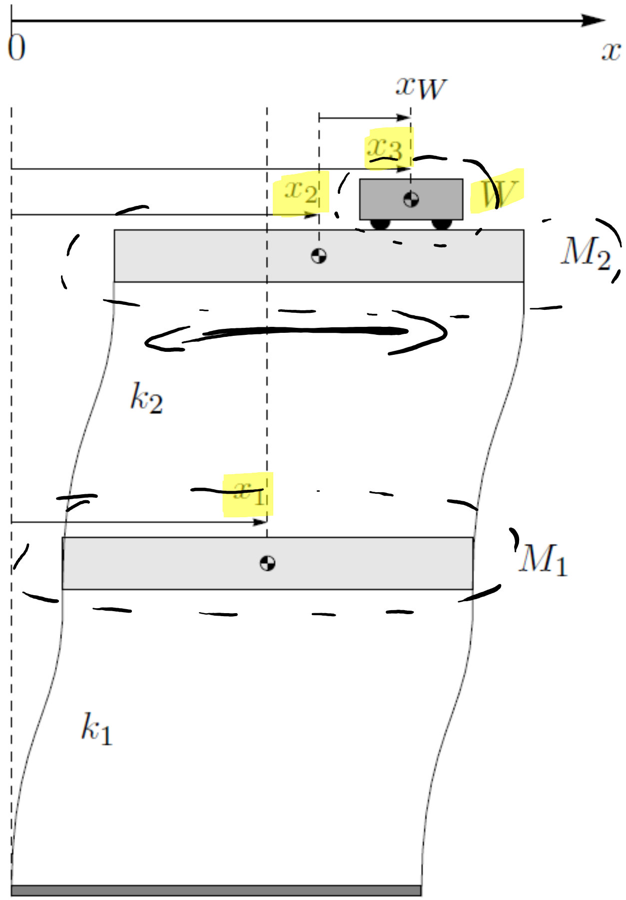
$$u = \Delta q_{zu}$$

$$\Delta \dot{h}_A = k_{A,1} \cdot \Delta h_A + k_{B,1} \cdot \Delta h_B + k_q \cdot \Delta q_{zu}$$

$$\Delta \dot{h}_B = k_{A,2} \cdot \Delta h_A + k_{B,2} \cdot \Delta h_B$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{h}_A \\ \Delta \dot{h}_B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{A,1} & k_{B,1} \\ k_{A,2} & k_{B,2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \Delta h_A \\ \Delta h_B \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} k_q \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \Delta q_{zu}$$

Aufgabe 2: Aufstellen eines Zustandsraummodelles



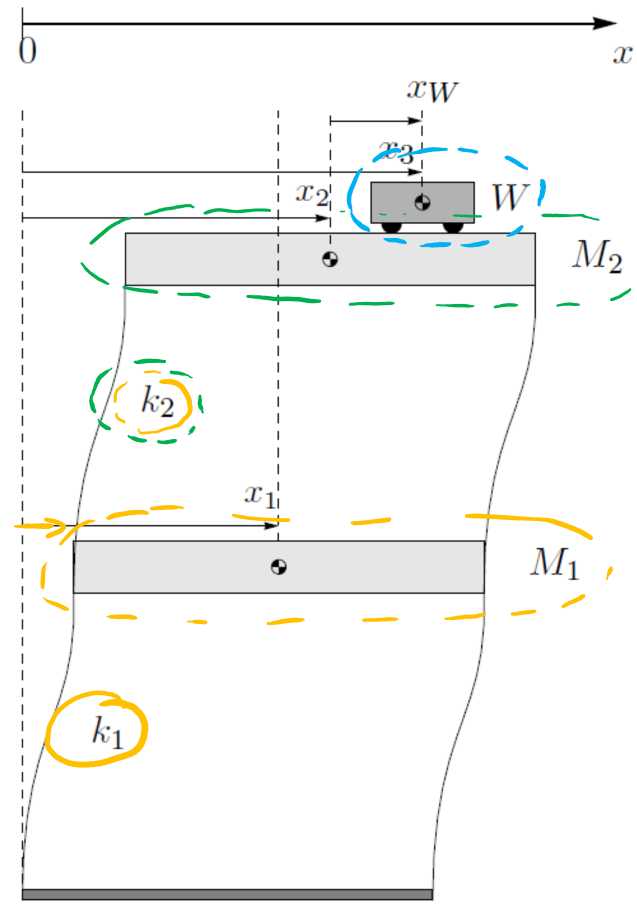
Aufgabe:

Bestimmen Sie das 6-dimensionale Zustandsraummodell des dargestellten Problems

- Eingangssignal:
  - Beschleunigung von W relativ zur Masse M_2
- Zustandsgrößen:
  - Positionen x und deren zeitliche Ableitungen $\dot{x}$

Aufgabe 2: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

Masse 1	$M_1 \cdot \ddot{x}_1$ $k_1 \cdot x_1$ $k_2(x_2 - x_1)$	$\leftarrow$ $\leftarrow$ $\rightarrow$
Masse 2	$M_2\ \ddot{x}_2$ $k_2(x_2 - x_1)$ $M_W(\ddot{x}_2 + u)$	$\leftarrow$ $\leftarrow$ $\leftarrow$
Wagen	$M_W \cdot \ddot{x}_3$ $M_W(\ddot{x}_2 + u)$	$\leftarrow$ $\rightarrow$



Aufgabe 2: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

Masse 1	$M_1 \cdot \ddot{x}_1$	$\leftarrow$
	$k_1 \cdot x_1$	$\leftarrow$
	$k_2 \cdot (x_2 - x_1)$	$\rightarrow$
Masse 2	$M_2 \cdot \ddot{x}_2$	$\leftarrow$
	$k_2(x_2 - x_1)$	$\leftarrow$
	$M_W \cdot (\ddot{x}_2 + u)$	$\leftarrow$
Wagen	$M_W \cdot \ddot{x}_3$	$\leftarrow$
	$M_W(\ddot{x}_2 + u)$	$\rightarrow$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$-M_1 \underline{\ddot{x}_1} - k_1 \cdot x_1 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$-M_2 \ddot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - M_w(\underline{\ddot{x}_2} + u) = 0$$

$$-M_w \underline{\ddot{x}_3} + M_w(\ddot{x}_2 + u) = 0$$

Aufgabe 2: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

$$\dot{x}_4 = -\frac{k_1+k_2}{M_1} x_1 - \frac{k_2}{M_1} x_2$$

$$x_4 = \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{x}_1$$

$$\dot{x}_5 = \frac{k_2}{M_2+M_W} x_1 - \frac{k_2}{M_2+M_W} x_2 - \frac{M_W}{M_2+M_W} u$$

$$x_5 = \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_5 = \ddot{x}_2$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{k_2}{M_2+M_W} x_2 + \frac{k_2}{M_2+M_W} x_1 + \frac{M_2}{M_2+M_W} u$$

$$x_6 = \dot{x}_3 \Rightarrow \dot{x}_6 = \ddot{x}_3$$

$$\dot{x}_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = x_6$$

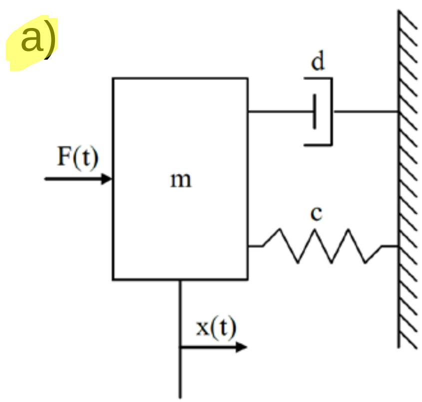
Aufgabe 2: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

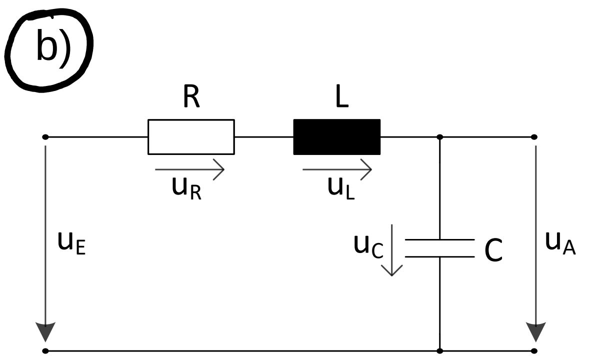
$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-\frac{K_1+K_2}{M_1} & -\frac{K_2}{M_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{K_2}{M_2+M_W} & -\frac{K_2}{M_2+M_W} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{K_2}{M_2+M_W} & -\frac{K_2}{M_2+M_W} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{M_W}{M_2+M_W} \\ \frac{M_2}{M_2+M_W} \end{pmatrix} u
$$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Gegeben sind die beiden linearen Systeme





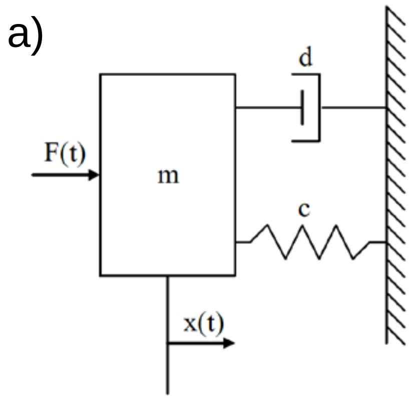
Das System in Abbildung a) wurde bereits in der ersten Übung behandelt und wird mit der Differentialgleichung

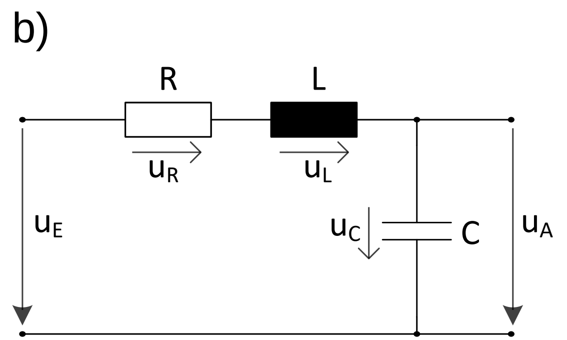
$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t)} \qquad (1)$$

beschrieben.

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Gegeben sind die beiden linearen Systeme



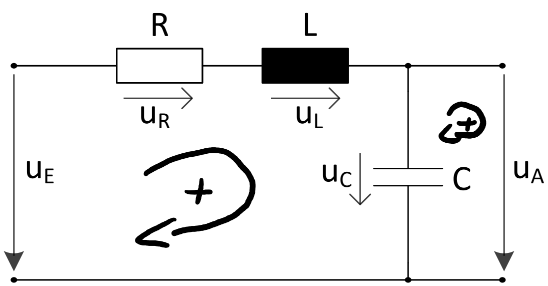


Der in Abbildung b) dargestellte Schaltkreis besteht aus einem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Der Schaltkreis wird mit einer Eingangsspannung von $u_E(t)$ beaufschlagt und es fällt eine Spannung $u_A(t)$ am Ausgang an.

Aufgaben: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des in b) dargestellten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des in b) dargestellten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.



$$0 = u_R + u_L + u_C - u_E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_E = u_R + u_L + u_C}$$

$$\boxed{u_C = u_A}$$

$$i_R = i_L = i_C = i$$

$$u_R = R \cdot i_R$$

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

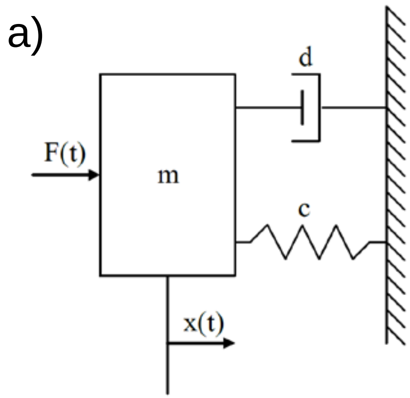
$$i = C \cdot \frac{du_A}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2u_A}{dt^2}$$

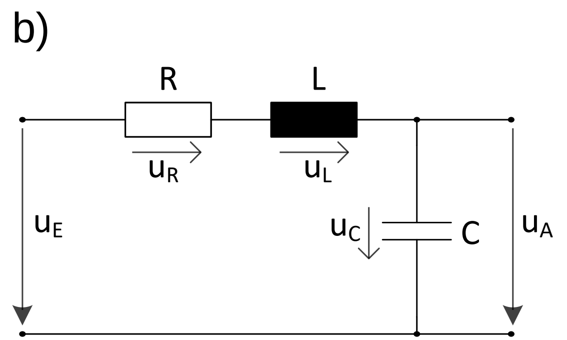
$$u_E = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + u_A$$

$$u_E = R \cdot C \cdot \frac{du_A}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2u_A}{dt^2} + u_A$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Gegeben sind die beiden linearen Systeme





Der in Abbildung b) dargestellte Schaltkreis besteht aus einem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Der Schaltkreis wird mit einer Eingangsspannung von $u_E(t)$ beaufschlagt und es fällt eine Spannung $u_A(t)$ am Ausgang an.

Aufgaben: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

$$L \cdot \ddot{u}_A + R\,\dot{u}_A + \frac{1}{C}\,u_A = \frac{1}{C}\,u_E$$

$$m \cdot \ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = F(t)$$

Spannung $\equiv$ Weg

Masse $\longleftrightarrow$ Induktivität

Dämpfung $\longleftrightarrow$ Widerstand

Federnachgiebigkeit $\longleftrightarrow$ Kapazität

$$\boxed{a_2\,\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_0\,y(t) = b_0 \cdot u(t)} \longrightarrow PT_2\text{-Verhalten}$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0 \cdot u(t)}$$

D: Dämpfungsgrad (nicht gleich der mech. Dämpfung)

ω_0: Eigenfrequenz

K: stat. Verstärkung

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

$$\ddot{x}(t) + \underbrace{\frac{d}{m}}_{2D\omega_0}\dot{x}(t) + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2}x(t) = \underbrace{\frac{1}{m}}_{K\omega_0}F(t)$$

$$\ddot{u}_A(t) + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2D\omega_0}\dot{u}_A(t) + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega_0^2}u_A(t) = \frac{1}{CL}u_E$$

mechanischen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$D = \frac{1}{2}\frac{d}{\sqrt{c \cdot m}}$$

$$\frac{1}{m} = K\omega_0 = K\sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$K = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{c}} = \sqrt{\frac{1}{cm}}$$

elektrischen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C \cdot L}}$$

$$D = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

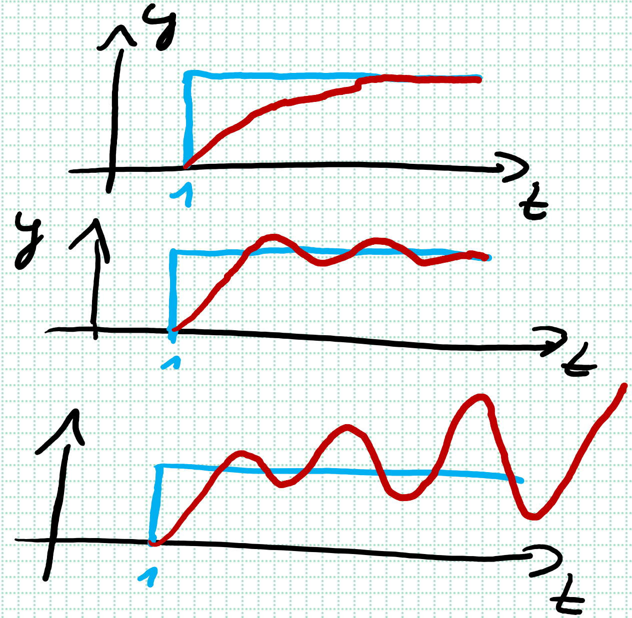
Dämpfungsgrad D

Zeitverhalten des Ausgangs $y(t)$

$D > 1$: aperiodisches Verhalten

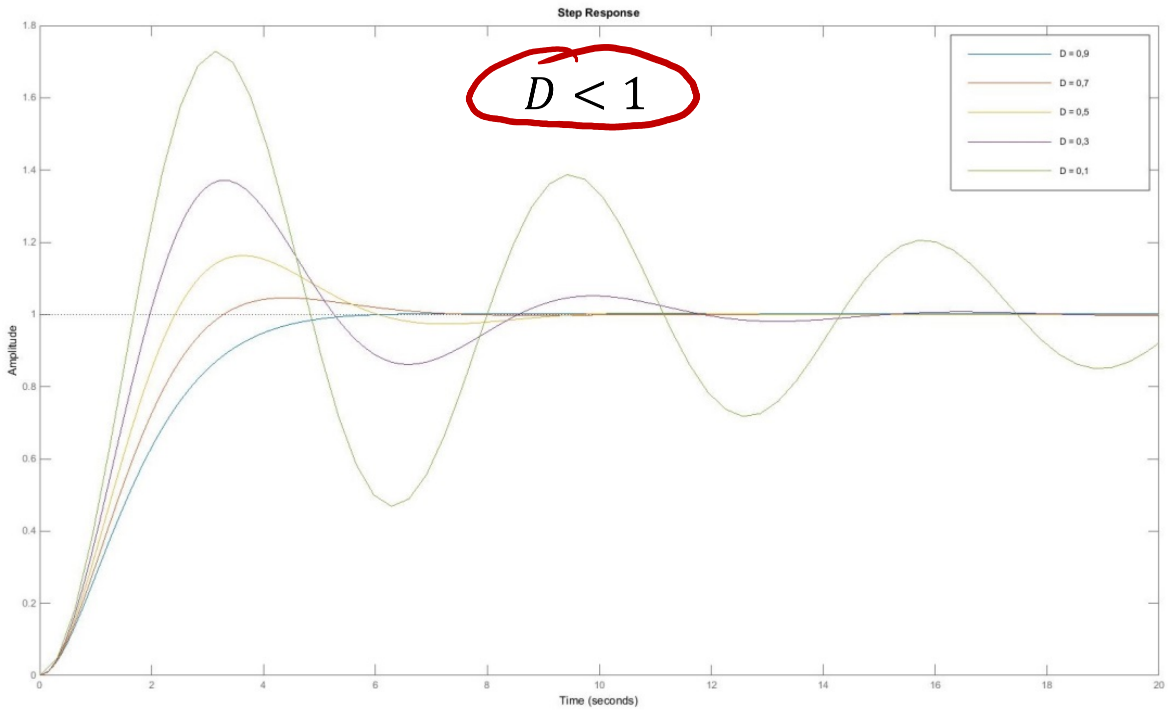
$1 > D > 0$: gedämpfte Schwingung

$D < 0$: ungedämpfte Schwingung (instabil)



Sprungantworten von PT2-Systemen mit unterschiedlicher Dämpfung

- Über den Dämpfungsgrad eines PT2-Systems lässt sich deren Zeitverhalten charakterisieren
- Stabiles aperiodisches oder <u>schwingungsfähiges</u> Verhalten



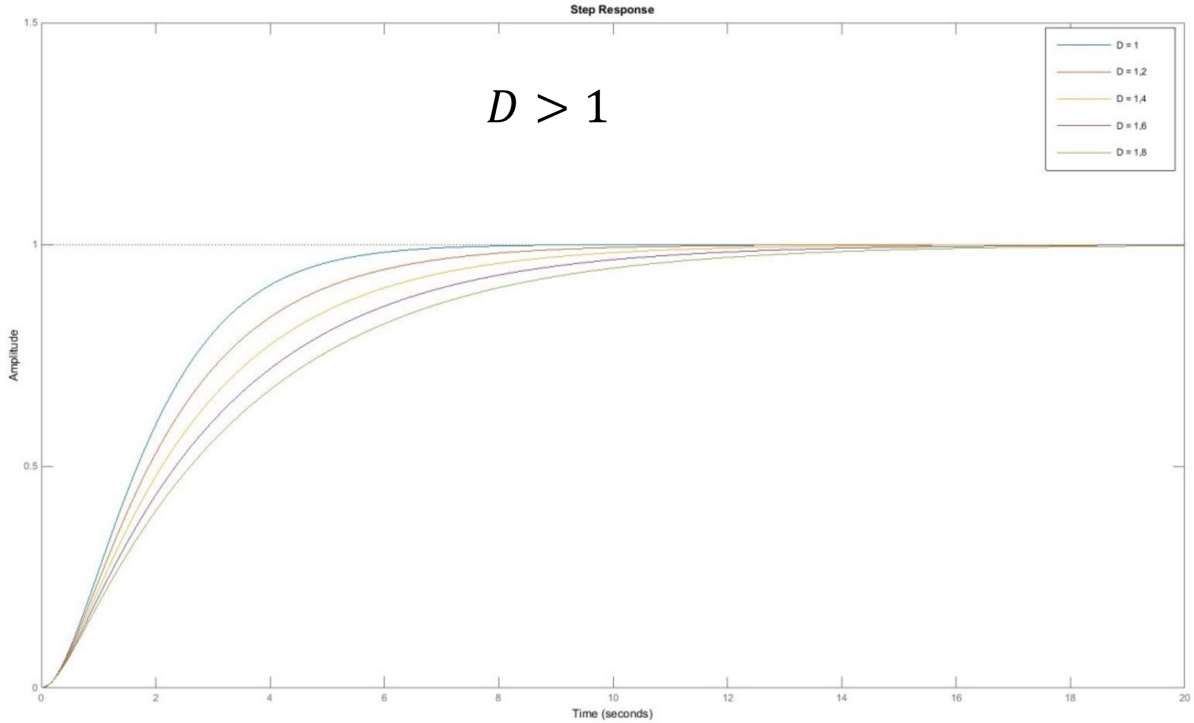
$D < 1$

D=0,9

D=0,1

Sprungantworten von PT2-Systemen mit unterschiedlicher Dämpfung

- Über den Dämpfungsgrad eines PT2-Systems lässt sich deren Zeitverhalten charakterisieren
- Stabiles <u>aperiodisches</u> oder schwingungsfähiges Verhalten

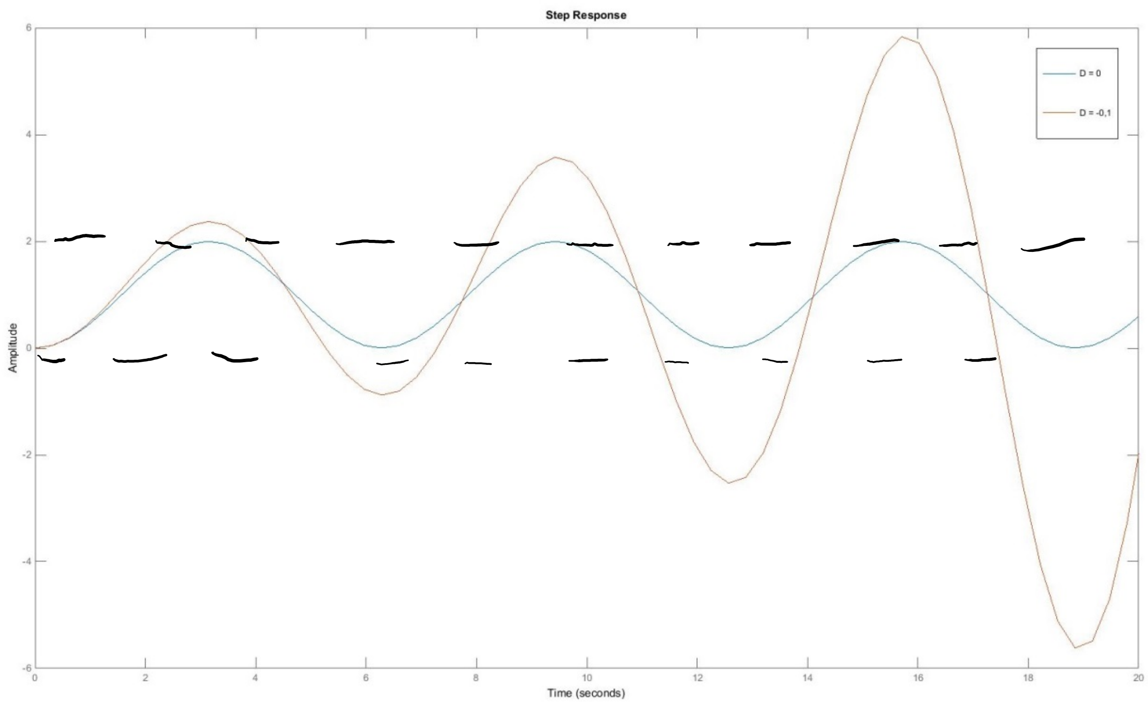


D=1

D=1,8

Sprungantworten von PT2-Systemen mit unterschiedlicher Dämpfung

- Über den Dämpfungsgrad eines PT2-Systems lässt sich deren Zeitverhalten charakterisieren
- Grenz- oder instabiles Schwingungsverhalten für $D \leq 0$



$D = 0$

$D = -0{,}1$