2. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Linearisierung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Nichtlineare Differentialgleichungen

- Die Welt ist nichtlinear
- Sehr viele phys. und techn. Sachverhalte nur nichtlinear beschreibbar
  → siehe erste Übung

- Nichtlinearität in Systemtheorie: Ausgang nicht proportional zum Eingang
- Superpositionsprinzip gilt nicht

- Keine geschlossene mathematische Theorie und keine allgemeine Analyse-Methode

Nichtlineare Systeme in der Regelungstechnik

- Keine geschlossene Theorie vorhanden (im Gegensatz zu lin. Systemen)
- Es existieren Regelungsverfahren
  - Häufig nur in speziellen Fälle anwendbar
  - Verhalten kann nur für modellierte Gleichungen garantiert werden
  - Modellierungsfehler können sich fatal auswirken
  - Reale Anwendung daher häufig schwierig

- Versuch nichtlineare Systeme näherungsweise durch lineare Gleichungen zu approximieren
- Sehr viele technische System werden nur in Umgebung von Arbeitspunkten betrieben
- Lineare Approximation des Verhaltens im Bereich dieser Arbeitspunkt

Linearisierung

- Anwendung der Taylor-Reihenentwicklung
- Reihenansatz um glatte Funktionen in Umgebung eines Punktes durch Potenzreihe darzustellen

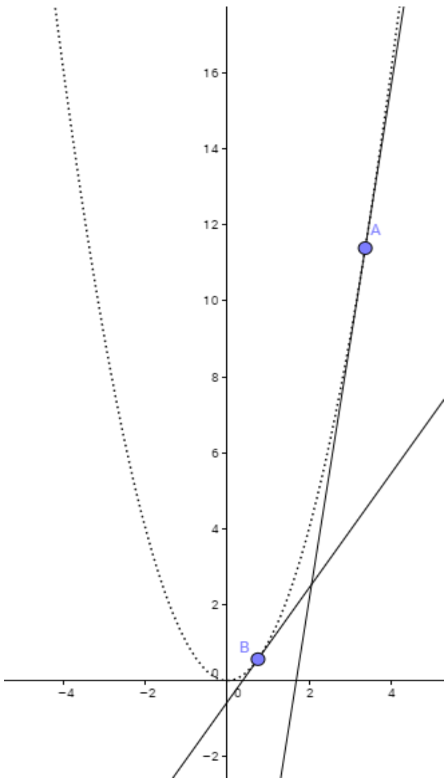
- Allgemeiner Ansatz im Punkt a: $\boxed{\mathrm{T}f(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n}$
- Bei Entwicklung bis $\underline{n = 1}$ erhält man linearen Ausdruck
- Erhalt einer linearen Approximation der Umgebung von $x = \underline{a}$

- $\boxed{T_1 f(x,a) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}$ $x - a = \Delta x$

- Diese Näherung wird allgemein als Linearisierung bezeichnet

Linearisierung

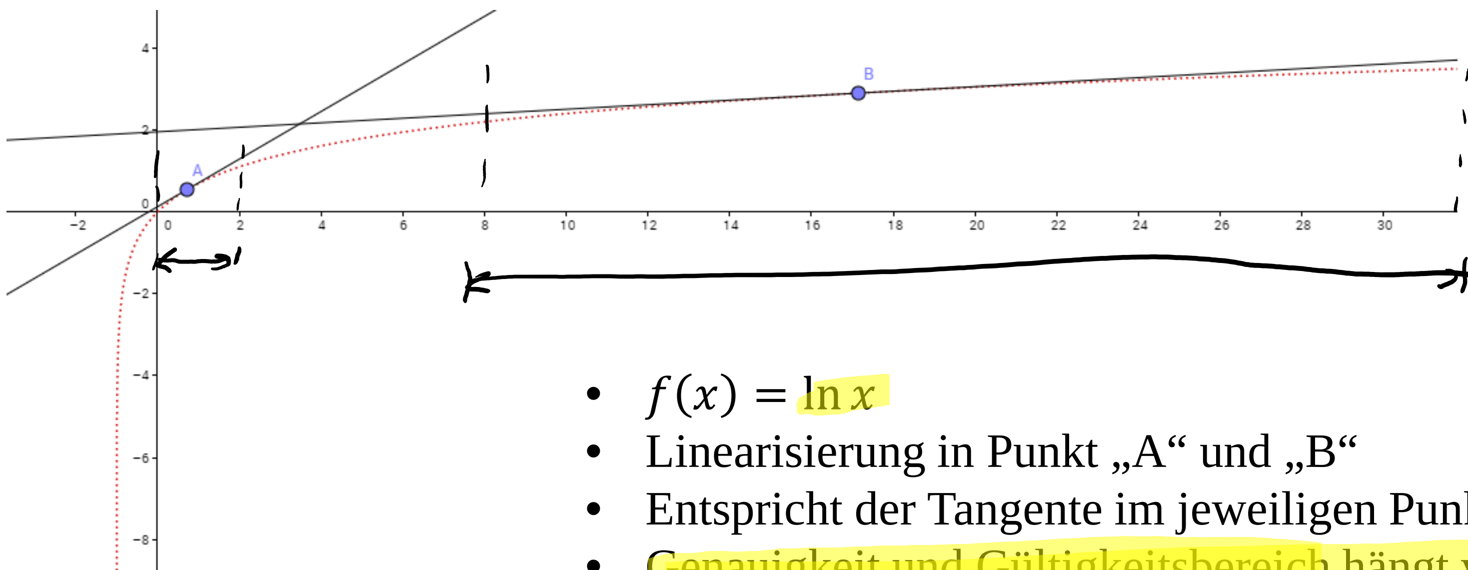
- Graphische Beispiele



- $f(x) = x^2$
- Linearisierung in Punkt „A“ und „B“
- Entspricht der Tangente im jeweiligen Punkt
- Genauigkeit und Gültigkeitsbereich hängt von Funktionsverlauf ab

Linearisierung

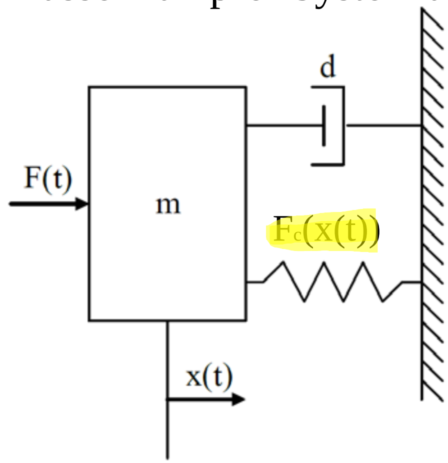
- Graphische Beispiele



- $f(x) = \ln x$
- Linearisierung in Punkt „A“ und „B“
- Entspricht der Tangente im jeweiligen Punkt
- Genauigkeit und Gültigkeitsbereich hängt von Funktionsverlauf ab

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

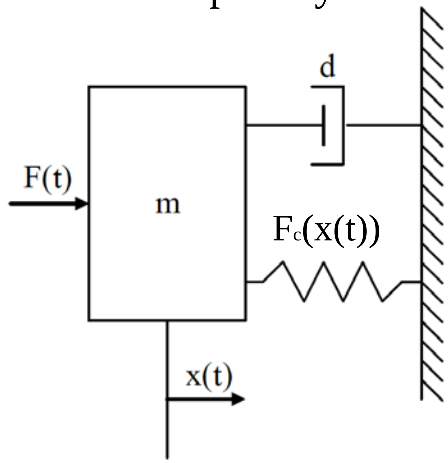
Gegeben ist das folgende Feder-Masse-Dämpfer System aus Übung 1)



Die Feder wurde durch eine andere ersetzt, welche eine nichtlineare Kennlinie der Form $F_c(x(t)) = \sqrt{C_0 \cdot x(t)}$ besitzt. Das System wird weiterhin von einer zeitabhängigen Kraft F(t) angeregt.

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

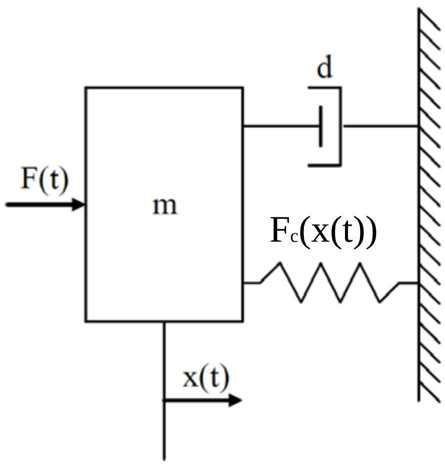
Gegeben ist das folgende Feder-Masse-Dämpfer System aus Übung 1)



Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung, die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems mit der neuen Feder in der Koordinate x beschreibt. Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung, die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems mit der neuen Feder in der Koordinate x beschreibt.



$$\Sigma F = m \cdot \ddot{x}(t)$$

$\vdots$ siehe Ü1

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + \underbrace{\sqrt{c_0\, x(t)}} = F(t)$$

nichtlineare DGL

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

Ruhelage $\quad \ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = 0 \qquad F(t) = F_0$

$$m \cdot \cancel{\ddot{x}_0}^{\,0} + d \cdot \cancel{\dot{x}_0}^{\,0} + \boxed{\sqrt{c_0 \cdot x_0} = F_0}$$

$$\underline{\underline{x_0 = \frac{F_0^2}{c_0}}}$$

$\longrightarrow$ Arbeitspunkt „a"

Linearisierung in Umgebung der Ruhelage

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

$x(t) = x_0 + \Delta x$ Abweichung von Ruhelage

$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \Delta\dot{x}$

$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 + \Delta\ddot{x}$

$F(t) = F_0 + \Delta F$

$$\longrightarrow \quad m(\cancel{\ddot{x}_0}^{\,0} + \Delta\ddot{x}) + d(\cancel{\dot{x}_0}^{\,0} + \Delta\dot{x}) + \sqrt{c_0(x_0+\Delta x)} = F_0 + \Delta F$$

$$\Longleftrightarrow \quad m \cdot \Delta\ddot{x} + d\,\Delta\dot{x} + \underbrace{\sqrt{c_0(x_0+\Delta x)}}_{f(x_0+\Delta x)} = F_0 + \Delta F$$

$f(x) = \sqrt{c_0 \cdot x}$

$$f(x_0+\Delta x) = \sqrt{c_0(x_0+\Delta x)} \approx f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \cdot \Delta x + \ldots$$

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

$$\frac{df(x)}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{c_0}\,\frac{1}{\sqrt{x(t)}} \longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \frac{1}{2}\sqrt{c_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

$$\sqrt{c_0(x_0+\Delta x)} \approx \underbrace{\sqrt{c_0\cdot x_0}}_{f(x_0)} + \frac{1}{2}\sqrt{c_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x + \ldots$$

$$\approx \sqrt{\cancel{c_0}\cdot\frac{F_0^2}{\cancel{c_0}}} + \frac{1}{2}\sqrt{c_0}\cdot\sqrt{\frac{c_0}{F_0^2}}\,\Delta x = \underline{F_0 + \frac{1}{2}\frac{c_0}{F_0}\,\Delta x}$$

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

$$m \cdot \Delta\ddot{x} + d\,\Delta\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{C_0}{F_0}\Delta x + \cancel{F_0} = \cancel{F_0} + \Delta F$$

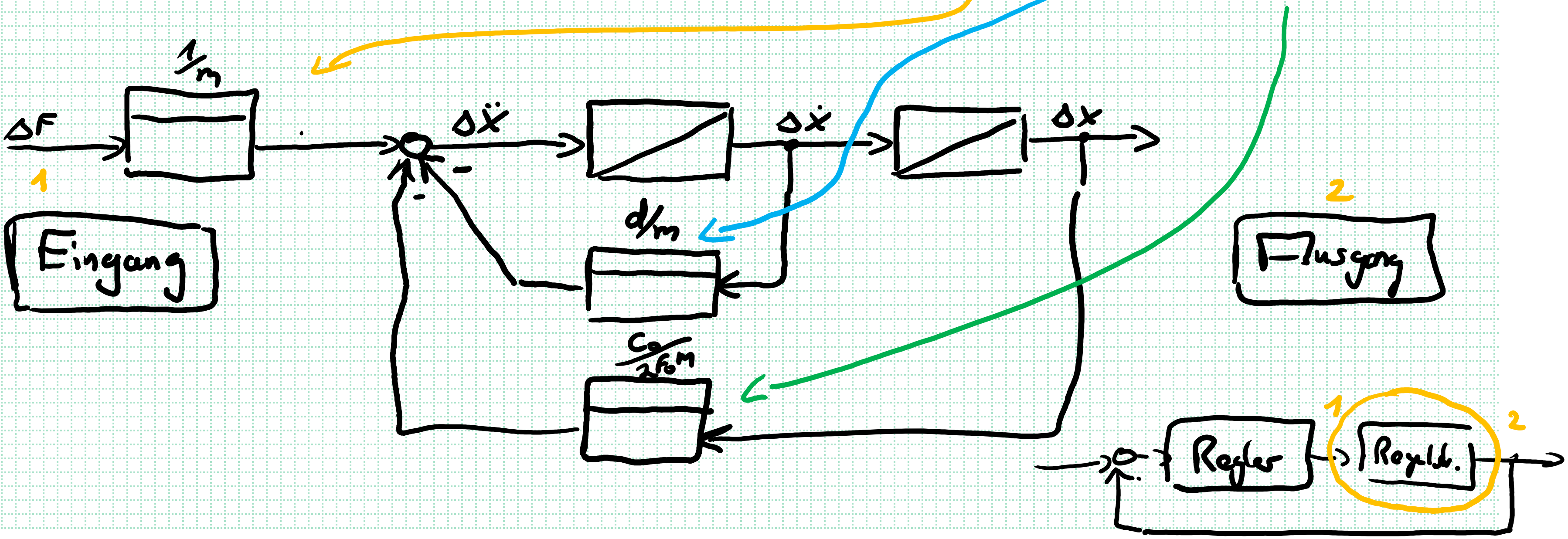
$$\Leftrightarrow \boxed{m \cdot \Delta\ddot{x} + d\,\Delta\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{C_0}{F_0}\Delta x = \Delta F}$$

$$\approx \sqrt{C_0(x_0 + \Delta x)}$$

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

$$m\Delta\ddot{x} + d\Delta\dot{x} + \frac{c_0}{2F_0}\Delta x = \Delta F \iff \Delta\ddot{x} = \frac{1}{m}\left[\Delta F - d\Delta\dot{x} - \frac{c_0}{2F_0}\Delta x\right]$$



Anmerkungen zur linearisierten Differentialgleichung

- Beschreibt nur Abweichungen vom definierten Arbeitspunkt - AP (hier Ruhelage)
- Nur in der Nähe von AP gültig, je größer der Abstand, desto größer wird der Fehler durch die Linearisierung
- Kann nur dazu benutzt werden um ein System in Umgebung des AP zu regeln

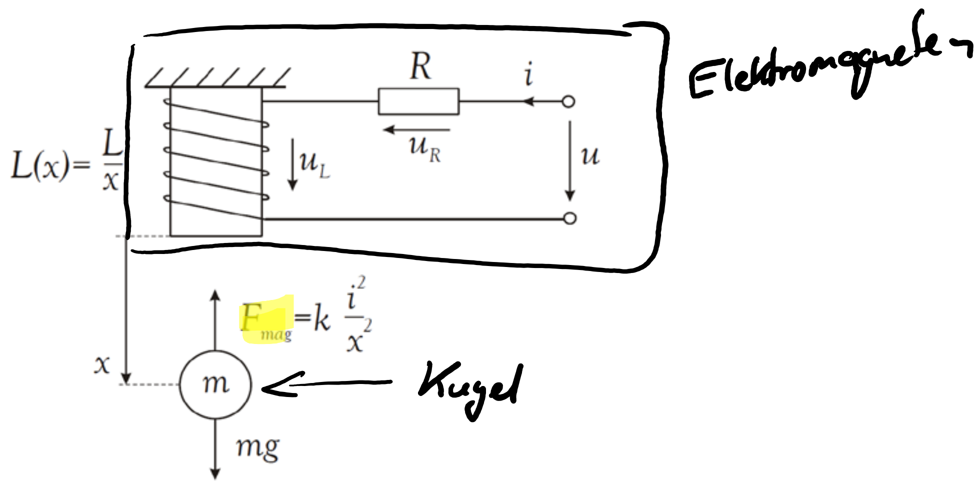
→ F_0 → Ruhelage

- System muss durch u_0 in y_0 gebracht und dort gehalten werden
- Durch ein Aufbringen von Δu kann das System in Nähe des AP, also Δy beeinflusst werden

- Durch Linearisierung wird eine lin. Approximation einer nichtlin. Differentialgleichung in der Umgebung eines definierten Punktes gewonnen
- Viele Probleme in der Regelungstechnik erfüllen diese Problematik
- Linearisierung ist daher ein sehr oft verwendeter Ansatz

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Gegeben ist der elektrische Hubmagnet aus Übung 1.)



Durch das Aufbringen eines Stroms i auf die abstandabhängige Induktivität $L(x)$ wird ein Magnetfeld erzeugt, welches eine Kraft auf die Eisenkugel mit der Masse m ausübt und diese anhebt.

Aufgabe 3. Elektrischer Hubmagnet

Der Stromkreis enthält neben der Induktivität einen ohmschen Widerstand R und es liegt eine Spannungsquelle u an. Die Kugel selbst wirkt das Schwerefeld der Erde mit der Gravitation g. Der Abstand zwischen der Kugel und dem Kern des Hubmagneten wird mit x bezeichnet.

Aufgaben:

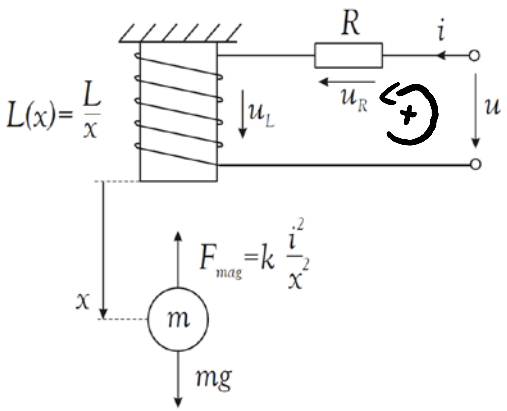
a) Bestimmen Sie ein dynamisches Systemmodell, welches das Verhalten des dargestellten Systems beschreibt.

b) Was lässt sich über die Linearität des erhaltenen Modells aussagen?

c) Ermitteln Sie alle möglichen Ruhelagen des Systems.

Aufgabe 3. Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie ein dynamisches Systemmodell, welches das Verhalten des dargestellten Systems beschreibt.



$$0 = u_R + u_L - u$$

$$u_R = R\cdot i$$

$$u_L = L(x)\cdot\frac{di}{dt} = \frac{L}{x}\cdot\frac{di}{dt}$$

Nichtlinearität

$$\boxed{u = R\cdot i + \frac{L}{x}\cdot\frac{di}{dt}}$$

$$m\cdot\ddot{x} = \sum F$$

$$F_g = m\cdot g$$

$$F_{mag} = k\cdot\frac{i^2}{x}$$

$$m\ddot{x} = m\cdot g - k\cdot\frac{i^2}{x^2}$$

Nichtlinearität

$$\ddot{x} = g - \frac{k}{m}\cdot\frac{i^2}{x^2}$$

Aufgabe 3. Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie ein dynamisches Systemmodell, welches das Verhalten des dargestellten Systems beschreibt.

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i \cdot x + \frac{1}{L} \cdot x \cdot u$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}$$

Aufgabe 3. Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Was lässt sich über die Linearität des erhaltenen Modells aussagen?

$$0 = -i_0^2 \frac{R}{L}\sqrt{\frac{k}{m\cdot g}} + i_0 \cdot \frac{1}{L}\sqrt{\frac{k}{mg}}\, u_0$$

$$0 = i_0 \underbrace{\left(-i_0 \frac{R}{L}\sqrt{\frac{k}{m\cdot g}} + \frac{1}{L}\sqrt{\frac{k}{mg}}\, u_0\right)}_{=0}$$

$$i_0 \frac{R}{\cancel{L}}\cancel{\sqrt{\frac{k}{m\cdot g}}} = \frac{1}{\cancel{L}}\cancel{\sqrt{\frac{k}{m\cdot g}}}\, u_0$$

$$i_0 \cdot R = u_0$$

$$i_0 = \frac{u_0}{R}$$

$$i_0 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_0 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} i_0 = \frac{u_0}{R} \\ \\ x_0 = u_0 \frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{m\cdot g}} \end{array}}$$

Aufgabe 3. Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: c) Ermitteln Sie alle möglichen Ruhelagen des Systems.

Ruhelage $\frac{di}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$

$i(t) = i_0$

$x(t) = x_0$

$u(t) = u_0$

$$0 = -\frac{R}{L} i_0 \cdot x_0 + \frac{1}{L} x_0 \cdot u_0$$

$$0 = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2}$$

$$x_0 = i_0 \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

In der vorherigen Übung wurden für das System die folgenden Differentialgleichungen aufgestellt

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L} \cdot i \cdot x + \frac{1}{L} \cdot x \cdot u \\ \ddot{x}(t) &= g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2} \end{aligned}}$$

Aufgaben: a) Linearisieren Sie die Differentialgleichungen in deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Linearisieren Sie die Differentialgleichungen in deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$f(x_{10}+\Delta x_1, x_{20}+\Delta x_2, \ldots) = f(x_{10}, x_{20}, \ldots) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{AP} \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{AP} \cdot \Delta x_2 + \ldots$$

$$\cancel{\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_0}^{\to 0} + \Delta\left(\frac{di}{dt}\right) = \overbrace{-\frac{R}{L}(i_0+\Delta i)(x_0+\Delta x) + \frac{1}{L}(x_0+\Delta x)(u_0+\Delta u)}^{f(\vec{x}+\Delta\vec{x})}$$

$$\cancel{\ddot{x}_0}^{\to 0} + \Delta\ddot{x} = g - \frac{K}{m}\frac{(i_0+\Delta i)^2}{(x_0+\Delta x)^2}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Linearisieren Sie die Differentialgleichungen in deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$f(i, x, u) = -\frac{R}{L} i \cdot x + \frac{1}{L} x \cdot u$$

$$\left.\frac{df}{di}\right|_{i_0, x_0, u_0} = -\frac{R}{L} x_0$$

$$\left.\frac{df}{\partial x}\right|_{i_0, x_0, u_0} = -\frac{R}{L} i_0 + \frac{1}{L} u_0$$

$$\left.\frac{df}{\partial u}\right|_{i_0, x_0, u_0} = \frac{1}{L} x_0$$

$$f(i_0 + \Delta i, x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u)$$

$$\approx f(i_0, x_0, u_0) + \left(-\frac{R}{L} x_0\right) \cdot \Delta i$$

$$+ \left(-\frac{R}{L} i_0 + \frac{1}{L} u_0\right) \cdot \Delta x$$

$$+ \frac{1}{L} x_0 \cdot \Delta u$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Linearisieren Sie die Differentialgleichungen in deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$\Delta\left(\frac{di}{dt}\right) = \underbrace{f(i_0, x_0, u_0)} - \frac{R}{L} x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} i_0 + \frac{1}{L} u_0\right) \Delta x + \frac{1}{L} x_0 \cdot \Delta x$$

$$f(i_0, x_0, u_0) = - \frac{\cancel{R}}{L} \cdot \frac{\cancel{u_0}}{\cancel{R}} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K}{m \cdot g}}\, u_0^{2} + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K}{m \cdot g}} \cdot u_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{R}{L} x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} i_0 + \frac{1}{L} u_0\right) \Delta x + \frac{1}{L} x_0 \cdot \Delta u}$$

$$= -\underbrace{\frac{u_0}{L} \sqrt{\frac{K}{m \cdot g}}}_{K_{i,1}} \cdot \Delta i + \underbrace{\frac{u_0}{L R} \sqrt{\frac{K}{m \cdot g}}}_{K_u} \Delta u$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

$$\ddot{x} = \underbrace{g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}}_{f(x,i)}$$

$$\left.\frac{df}{di}\right|_{i_0,x_0} = -\frac{k}{m} \cdot 2 \frac{i_0}{x_0^2}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i_0,x_0} = +\frac{k}{m} \cdot 2 \frac{i_0^2}{x_0^3}$$

$$\cancel{\ddot{x}_0}^{\to 0} + \Delta\ddot{x} = \underbrace{g - \frac{k}{m} \frac{(i_0+\Delta i)^2}{(x_0+\Delta x)^2}}_{f(x_0+\Delta x,\, i_0+\Delta i)}$$

$$f(x_0+\Delta x, i_0+\Delta i)$$

$$\approx f(x_0, i_0) + 2\frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3} \cdot \Delta x - \frac{k}{m} \cdot 2 \cdot \frac{i_0}{x_0^2} \cdot \Delta i$$

$$\approx g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2} + 2\frac{k}{m} \frac{i_0^2}{x_0^3} \Delta x - 2\frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2} \Delta i$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

$$\Delta\ddot{x} = \underbrace{2\,\frac{gR}{u_0}\sqrt{\frac{m\cdot g}{k}}}_{K_x}\,\Delta x \;-\; \underbrace{2\,\frac{gR}{u_0}}_{K_{i,2}}\,\Delta i$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.