1. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Systemmodellierung, lineare und nichtlineare Systeme

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Dozent:

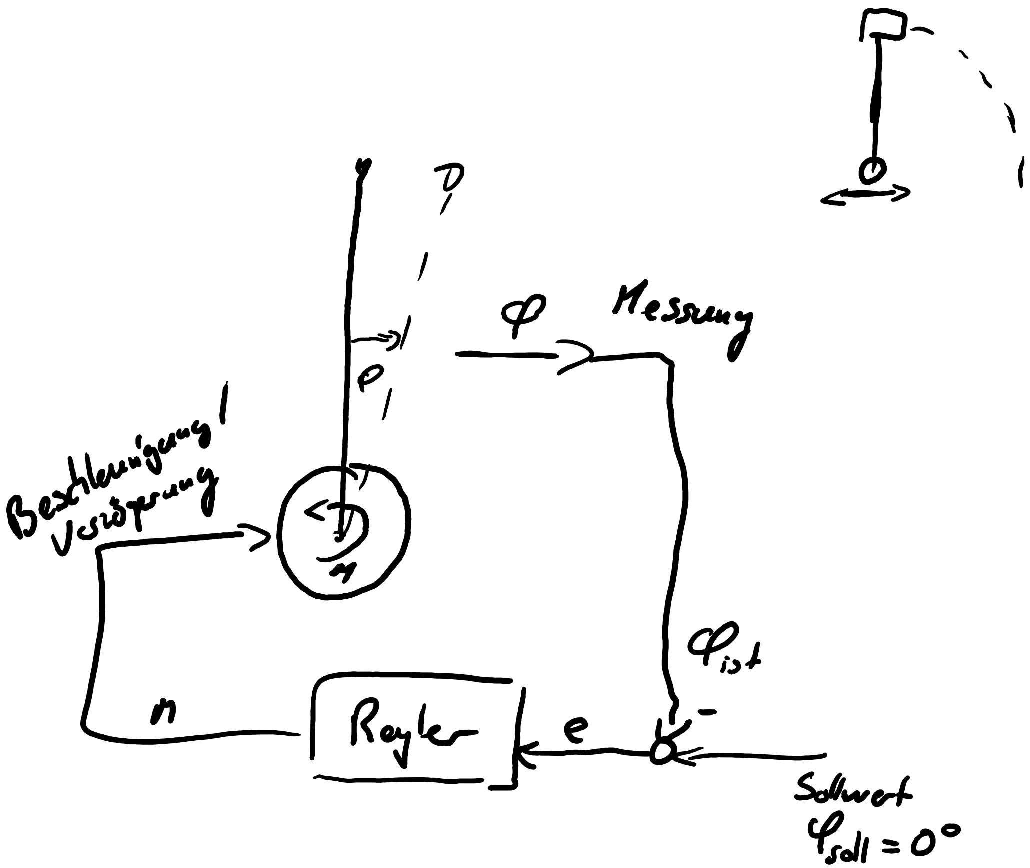
Felix Goßmann
MBDA Deutschland GmbH – ehemaliger Mitarbeiter am Lehrstuhl
felix.gossmann@unibw.de

- Termine nach Vereinbarung
- Unterlagen zur Übung auf der Homepage (Lehrveranstaltungen/Unterlagen/SRT)
  - https://www.unibw.de/lrt15

Klausurinfos

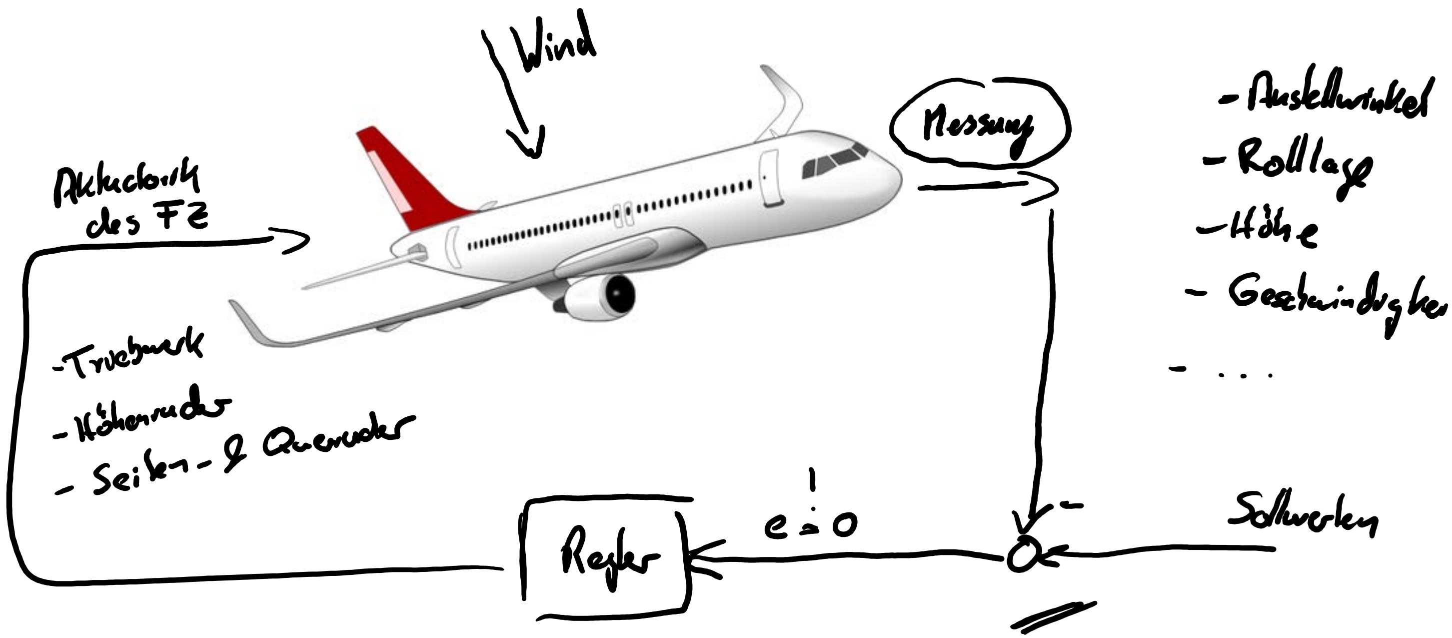
- Zweigeteilte Klausur: Mess- und **Regelungstechnik**
  - Zwei unabhängige Klausuren, hintereinander geschrieben
  - Gemeinsame Bewertung (oder anders: Es müssen nicht beide Teil „bestanden“ werden)
- Klausurteil SRT besteht wiederum aus **zwei** Teilen:
  - Fragenteil (ohne Hilfsmittel), bezieht sich auf die Vorlesung
  - Rechenteil mit drei Aufgaben, alle schriftlichen Hilfsmittel zugelassen
    - Orientiert sich inhaltlich an der Übung
  - Auswahlklausur: ~70% für eine 1,0 im SRT-Teil, 4,0 bei ~30%

Was ist eigentlich Regelungstechnik?

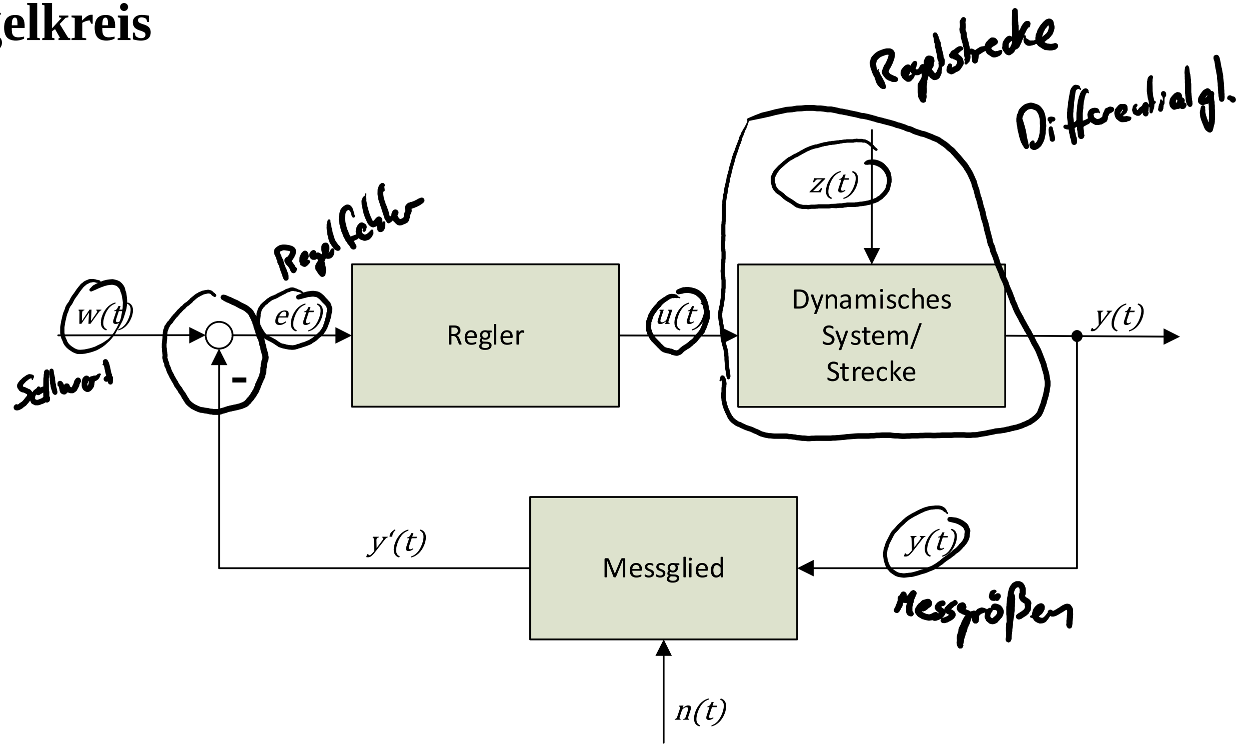


Was ist eigentlich Regelungstechnik?

Flugzeug: Autopilot (FMS)



Standardregelkreis



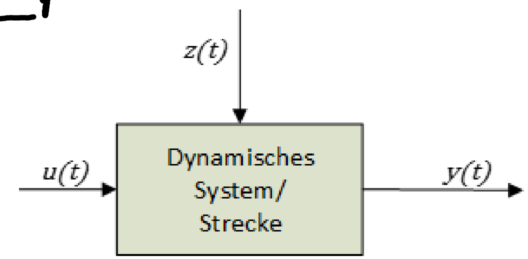
Einleitende Bemerkungen

- System:
    - Mathematisches Model eines technischen Vorganges
    - Zusammenwirken mehrerer technischer Komponenten
    - Differentialgleichungen
- Systeme besitzen immer Aktuatoren (Eingänge) und Sensoren (Ausgänge/Messglieder)
    - Eingänge in Differentialgleichungen → Inhomogene DGLs
    - Externe Beeinflussung des Systemverhaltens
    - Messung von Systemgrößen → Ausgänge/Messglieder
- Grundlegende Regelungstheorie beruht auf linearen Systemen
    - Lineare inhomogene Differentialgleichungen

Überblick der Veranstaltung

Modellbildung: (Übung 1 – 4)

- Mathematische Modellierung technischer Systeme
- Differentialgleichungen, Blockschaltbilder
- Linearisierung nichtlinearer Probleme
- (Laplace-Transformation)

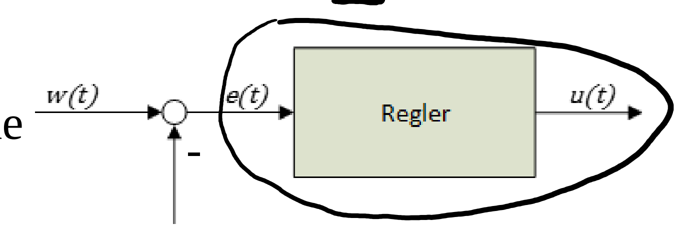


Analyse: (Übung 5 – 8)

- Laplace-Transformation
- Blockschaltbild-Algebra
- Charakterisierung und Bestimmung von Systemeigenschaften
- Stabilität

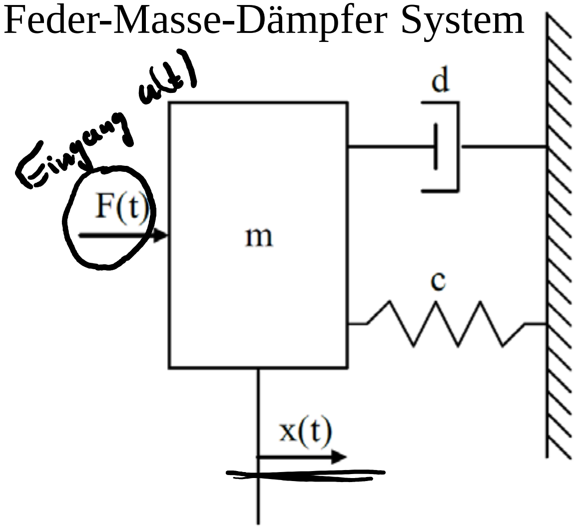
Reglerentwurf: (Übung 9 – 10)

- künstliche Stabilisierung instabiler Systeme
- Beeinflussung von Systemeigenschaften
- Aufprägen von gewünschtem Verhalten



Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Gegeben ist das folgende Feder-Masse-Dämpfer System

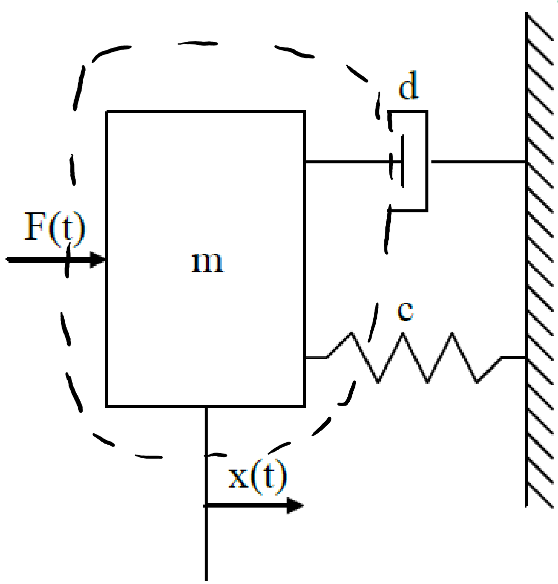


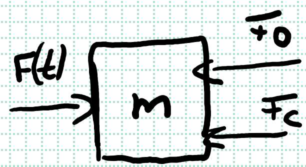
mit der Masse m, einem linearen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d und einer linearen Feder mit der Steifigkeit c. Das System wird von einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$ angeregt.

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung, welche die Bewegung der Masse m in x-Richtung des dargestellten Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung, welche die Bewegung der Masse m in x-Richtung des dargestellten Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.





$$\sum F = m \cdot a(t)$$

- Lin Dämpfer: $F_D = d \cdot \dot{x}(t)$
- Lin Feder: $F_C = c \cdot x(t)$

$$a(t) = \ddot{x}(t)$$

$$\sum F = F(t) - \overbrace{d\,\dot{x}(t)}^{F_D} - \overbrace{c \cdot x(t)}^{F_C} = m \cdot \ddot{x}(t)$$

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung, welche die Bewegung der Masse m in x-Richtung des dargestellten Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - d\,\dot{x}(t) - c \cdot x(t)$$

$$\boxed{m\,\ddot{x}(t) + d\,\dot{x}(t) + c\,x(t) = \underbrace{F(t)}_{\text{inhomogene}}}$$

inhomogene DGL

$$a_1\,\ddot{x}(t) + a_2 \cdot \dot{x}(t) + a_1 \cdot x(t) = b_1\,F(t)$$

$\longrightarrow$ linear

Aufgabe 1. Feder-Masse-Dämpfer System

Aufgabe: b) Ist das erhaltene System linear?

- Was bedeutet Linearität im Kontext von Differententialgleichungen überhaupt?
- Laut Vorlesung ist ein dynamisches System genau dann linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt
- Am Eingang linear überlagerte Signale führen zu linear überlagerten Ausgangssignalen

$$F(t) = c_1 \cdot F_1(t) + c_2 \cdot F_2(t) \quad \longleftrightarrow \quad x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = c_1 \cdot \dot{x}_1(t) + c_2 \cdot \dot{x}_2(t)$$

$$\ddot{x}(t) = c_1 \, \ddot{x}_1(t) + c_2 \cdot \ddot{x}_2(t)$$

$$m \cdot \ddot{x}(t) = c_1 \cdot \overbrace{m \cdot \ddot{x}_1(t)}^{F_1(t)} + c_2 \cdot \overbrace{m \cdot \ddot{x}_2(t)}^{F_2(t)}$$

$$= c_1 \left(F_1(t) - d \, \dot{x}_1(t) - c \cdot x_1(t) \right) + c_2 \left(F_2(t) - d \, \dot{x}_2(t) - c \cdot x_1(t) \right)$$

$$= \underbrace{\left[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) \right]}_{F(t)} - d \underbrace{\left[c_1 \cdot \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 \right]}_{\dot{x}(t)} - c \underbrace{\left[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \right]}_{x(t)}$$

Lineare Differentialgleichungen

- Grundsätzlich haben lineare Differentialgleichungen folgende Form

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{q} b_j \cdot \frac{d^j u(t)}{dt^j}}$$

$a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = b \cdot \underline{u}$

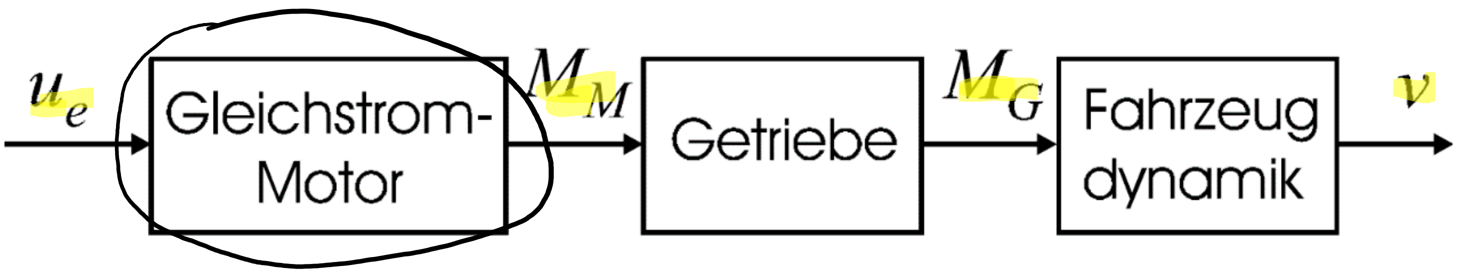
- Allgemein bezeichnet $u(t)$ den Systemeingang und $y(t)$ den Systemausgang
- Koeffizienten a_i und $\underline{b_j}$ sind konstant
- $\boxed{\text{Es gilt } q \leq n}$

$\underline{a \cdot x(t)}$

- Daraus folgt, das mathematische Operationen wie beispielsweise
  - $y_1(t) \cdot y_2(t)$
  - $\sqrt{y(t)}$
  - $y^2(t)$
- nichtlinear sind

Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Gegeben ist die vereinfachte Struktur des Antriebsstranges eines elektrischen Fahrzeuges.



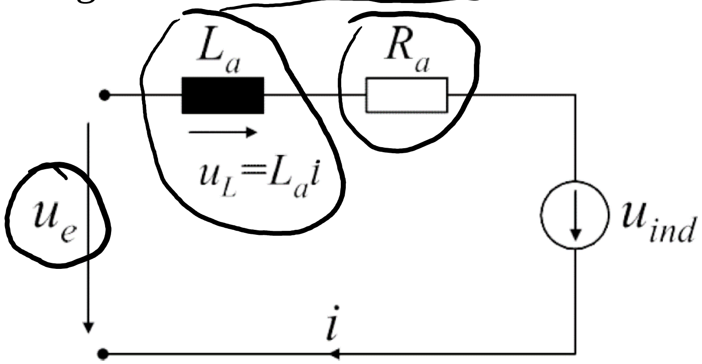
Mit

u_e: Eingangsspannung des Gleichstrommotors
M_M: Drehmoment des Motors
M_G: Moment nach der Übersetzung durch Getriebe
v: Geschwindigkeit des Fahrzeugs

Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Aufgabe: a) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung, die die Dynamik des Elektromotors beschreibt und stellen Sie diese anschließend in Form eines Blockschaltbildes dar.

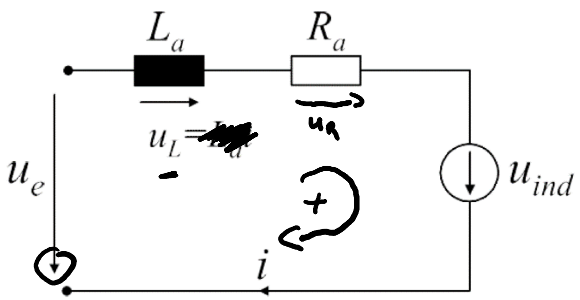
Der Elektromotor wird durch folgendes Ersatzschaltbild beschrieben



Mit L_a und R_a wird die Ankerinduktivität und –widerstand bezeichnet. Die Größe $u_{ind} = k \cdot \omega$ bezeichnet die durch die Winkelgeschwindigkeit ω der Motorachse erzeugte induzierte Gegenspannung. Das Motormoment ergibt sich durch $M_M = k \cdot i$. Die Winkelgeschwindigkeit ω kann zunächst als unabhängige Eingangsgröße angesehen werden.

Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Aufgabe: a) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung, die die Dynamik des Elektromotors beschreibt und stellen Sie diese anschließend in Form eines Blockschaltbildes dar.



$$0 = u_L + u_R + u_{ind} - u_e$$

$$\Leftrightarrow u_e = u_L + u_R + u_{ind}$$

$$u_{ind} = k \cdot \omega$$

$$u_e = L_a \cdot \frac{di}{dt} + R_a \cdot i + k \cdot \omega$$

$$M_M = k \cdot i$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R_a}{L_a} i = -\frac{K}{L_a} \omega + \frac{1}{L_a} u_e$$

$$i = \frac{M_M}{K}$$

$$\rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\dot{M}_M}{K}$$

Bauteile

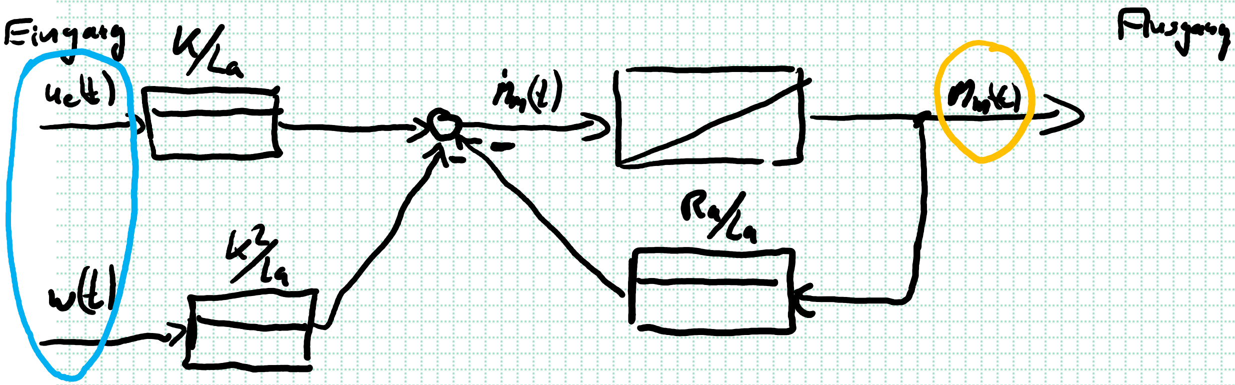
- $u_L = L_a \cdot \frac{di}{dt}$
- $u_R = R_a \cdot i$

Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

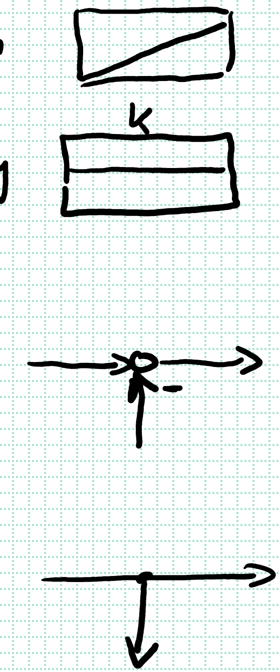
Aufgabe: a) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung, die die Dynamik des Elektromotors beschreibt und stellen Sie diese anschließend in Form eines Blockschaltbildes dar.

$$\dot{M}_M(t) + \frac{R_a}{L_a} M_M(t) = -\frac{K^2}{L_a}\,\omega(t) + \frac{K}{L_a}\,u_e(t)$$

$$\Rightarrow \dot{M}_M(t) = -\frac{K^2}{L_a}\,\omega(t) + \frac{K}{L_a}\,u_e(t) - \frac{R_a}{L_a}\,M_M(t)$$

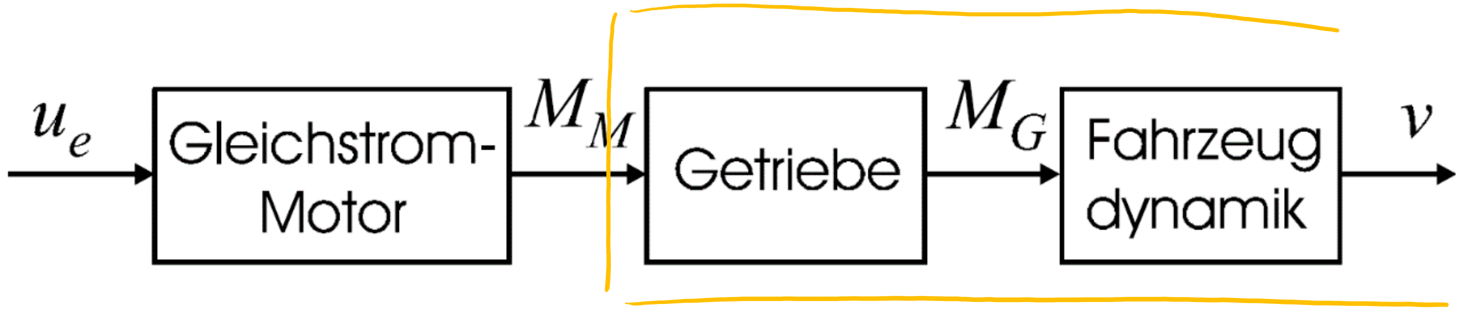


- Integration
- Verstärkung
- Summation
- Verzweigung



Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Gegeben ist die vereinfachte Struktur des Antriebsstranges eines elektrischen Fahrzeuges.



Das Getriebe übersetzt das Motormoment mit dem Verhältnis U nach der Formel $M_G = U \cdot M_M$. Das Moment M_G wird direkt auf die Antriebsachse übertragen. Das Fahrzeug besitzt die Masse m und einen Raddurchmesser d . Die Räder rollen ideal ab. Elastizitäten, Reibungseinflüsse und Trägheitsmomente der Räder können vernachlässigt werden.

Aufgabe: b) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung, die das dynamische Verhalten des Getriebes und der Fahrzeugdynamik beschreibt. Stellen Sie diese ebenfalls als Blockschaltbild dar.

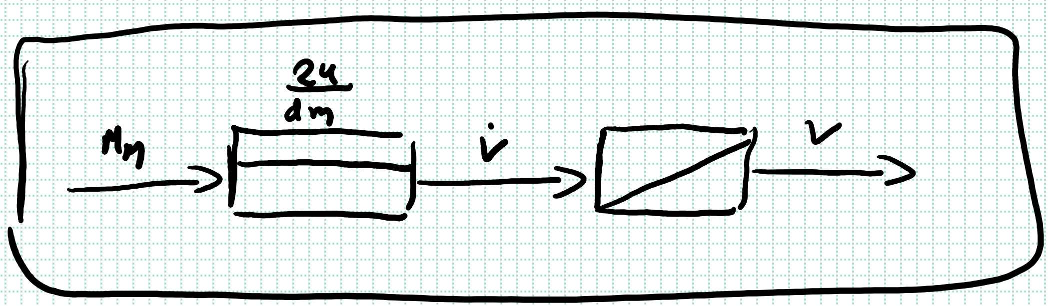
Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Aufgabe: b) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung, die das dynamische Verhalten des Getriebes und der Fahrzeugdynamik beschreibt. Stellen Sie diese ebenfalls als Blockschaltbild dar.

- Getriebe $M_G = u \cdot M_M$

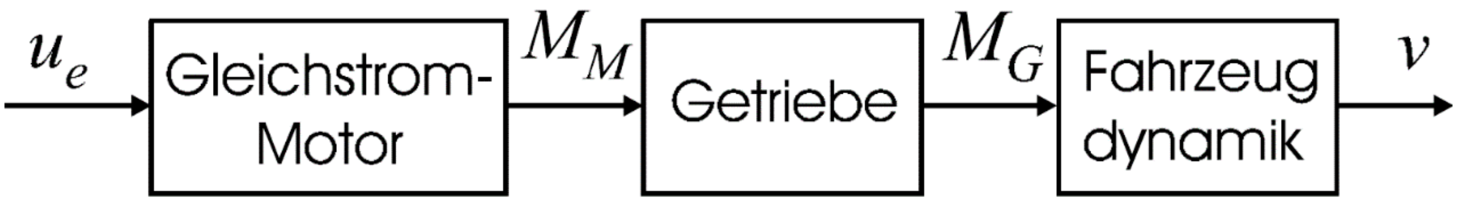
Kraftübertragung : $F = \frac{M_G}{d/2}$ $\dot{v} = \frac{2u}{d \cdot m} \cdot M_M$

Dynamik $F = m \cdot \dot{v}$



Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Gegeben ist die vereinfachte Struktur des Antriebsstranges eines elektrischen Fahrzeuges.



Aufgabe: c) Stellen sie das gesamte modellierte System in einem Blockschaltbild dar und ergänzen Sie die für das Motormodell benötigte Rückführung der Winkelgeschwindigkeit ω aus der Fahrzeugdynamik.

Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Aufgabe: c) Stellen sie das gesamte modellierte System in einem Blockschaltbild dar und ergänzen Sie die für das Motormodell benötigte Rückführung der Winkelgeschwindigkeit ω aus der Fahrzeugdynamik.

$$\omega_R = \frac{v}{d/2} = \frac{2v}{d}$$

$$\omega = u \cdot \omega_R = \frac{2u}{d} \cdot v$$

Aufgabe 2. Elektrisches Fahrzeug

Aufgabe: c) Stellen sie das gesamte modellierte System in einem Blockschaltbild dar und ergänzen Sie die für das Motormodell benötigte Rückführung der Winkelgeschwindigkeit ω aus der Fahrzeugdynamik.