Wurzelortskurvenverfahren (WOK-Verfahren)

- **Motivation.**
- **Unterscheidung: Wurzelort und Wurzelortskurve.**
- **Beispiel und Interpretation einer WOK.**
- **Ableitung des WOK-Verfahrens:**
  - **Ausgangspunkt ist die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises:**

$$1 + G_0(s) = 0$$

Zusammenfassung der 4. Vorlesung

Wurzelortskurven-Verfahren

Bestimmung des dynamischen Verhaltens eines geschlossenen Regelkreises mit Hilfe der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Kreis

$$G_0(s) = k_0 \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - n_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

$0 \leq k_0 \leq \infty$

Pol-Nullstellenform

Amplitudenbedingung:

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}|s - n_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s - p_i|} = \frac{1}{k_0}$$

Bestimmt die Parametrierung der WOK

Phasenbedingung:

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_{n_i} - \sum_{i=1}^{n}\varphi_{p_i} = \pm(2k+1)\pi$$

$= \pm 180°, 540°, 900°, ...$

Ist unabhängig von k_0 und legt den Verlauf der Wurzelortskurven fest

Zusammenfassung der 4. Vorlesung

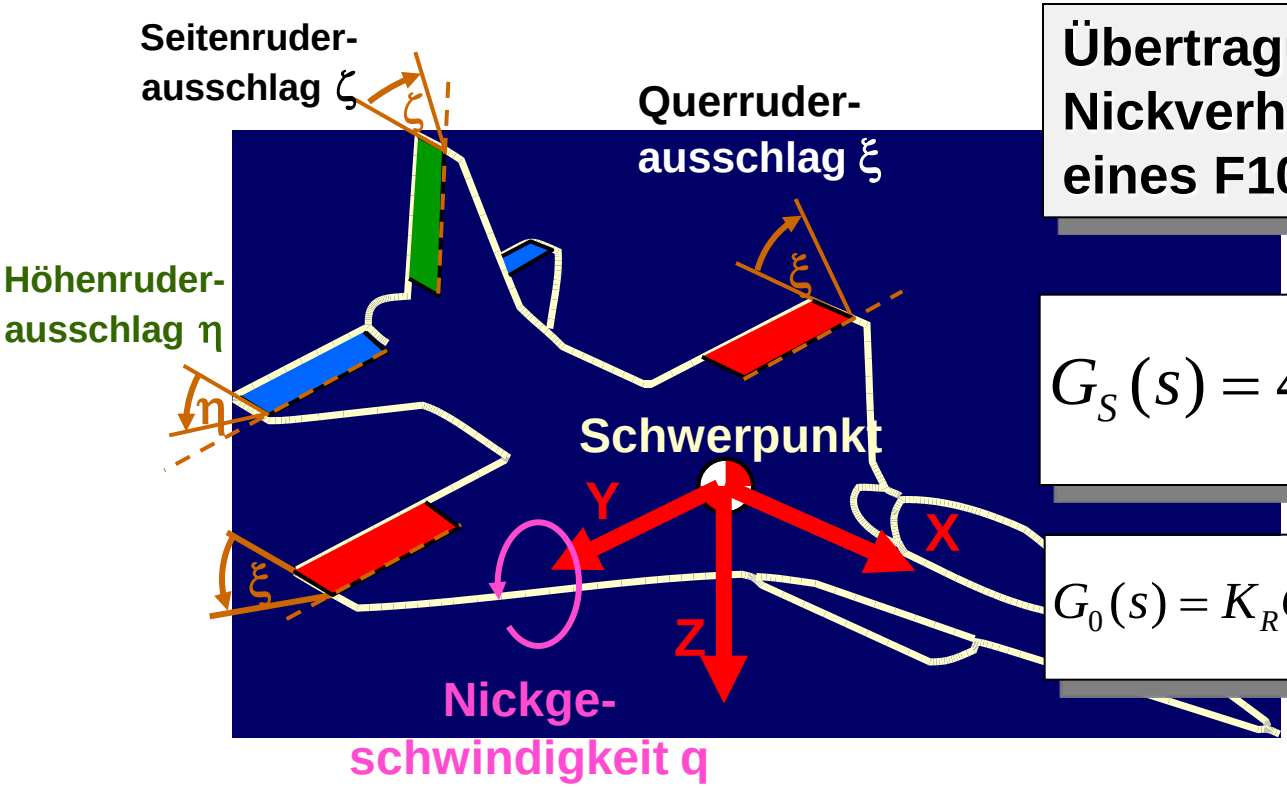
Wurzelortskurven-Verfahren

Bestimmung des dynamischen Verhaltens eines geschlossenen Regelkreises mit Hilfe der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Kreises.

- Unterschied zwischen System- und WOK-Verstärkung
- WOK-Konstruktionsregeln
- Qualitative Skizze mit Hilfe weniger Regeln

WOK: Beispiel Nickdämpfung

Verbesserung der Nickdämpfung eines Flugzeuges durch Rückführung der Nickgeschwindigkeit q auf den Höhenruderausschlag η



Übertragungsfunktion des Nickverhaltens für die Daten eines F104G im Landeanflug*:

$$G_S(s) = 4{,}81 \frac{s + 0{,}565}{s^2 + 0{,}97s + 2{,}11}$$

$$G_0(s) = K_R G_S(s) = 4{,}81 \frac{s + 0{,}565}{s^2 + 0{,}97s + 2{,}11}$$

WOK-Verstärkung k_0

Systemverstärkung aus

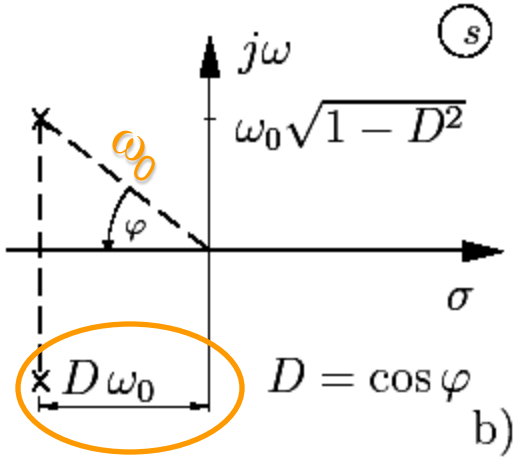
$$K_0 = G_0(s)\big|_{s=0} = \frac{4{,}81 \cdot 0{,}565}{2{,}11} = 1{,}288$$

für $K_R = 1$.

*Brockhaus: Flugregelung, 2001, Springer-Verlag, S. 505

WOK: Beispiel Nickdämpfung (2)

$$G_0(s) = K_R G_S(s) = 4{,}81 \frac{s + 0{,}565}{s^2 + 0{,}97 s + 2{,}11}$$



Pole: $p_{1,2} = -0{,}485 \pm 1{,}37i$

Nullstelle: $n_1 = -0{,}565$

Dämpfungsgrad:

$$D = \cos\varphi = \frac{|\mathrm{Re}(p_1)|}{\sqrt{|\mathrm{Re}(p_1)|^2 + |\mathrm{Im}(p_1)|^2}}$$

$$= \frac{0{,}485}{\sqrt{0{,}485^2 + 1{,}37^2}} = 0{,}337$$

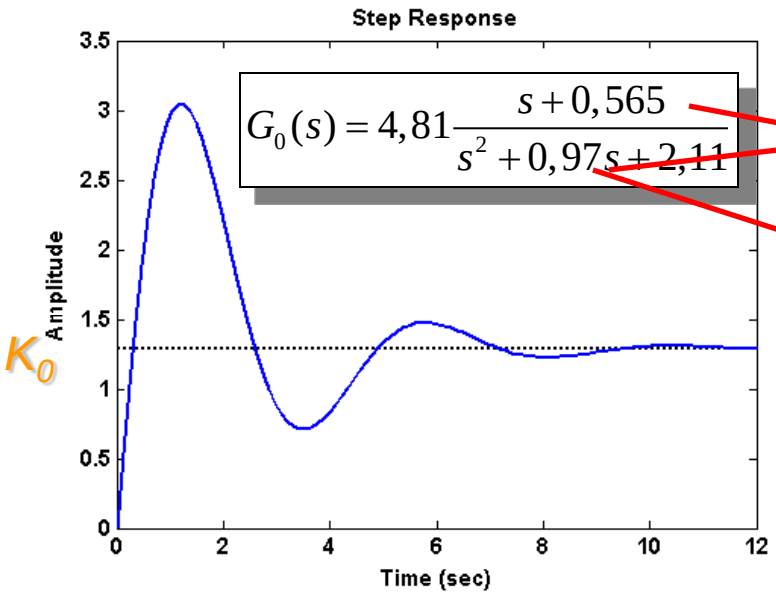
Eigenfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{|\mathrm{Re}(p_1)|}{D} = \frac{0{,}485}{0{,}337} = 1{,}44$$

$$\Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0{,}23\,Hz}$$

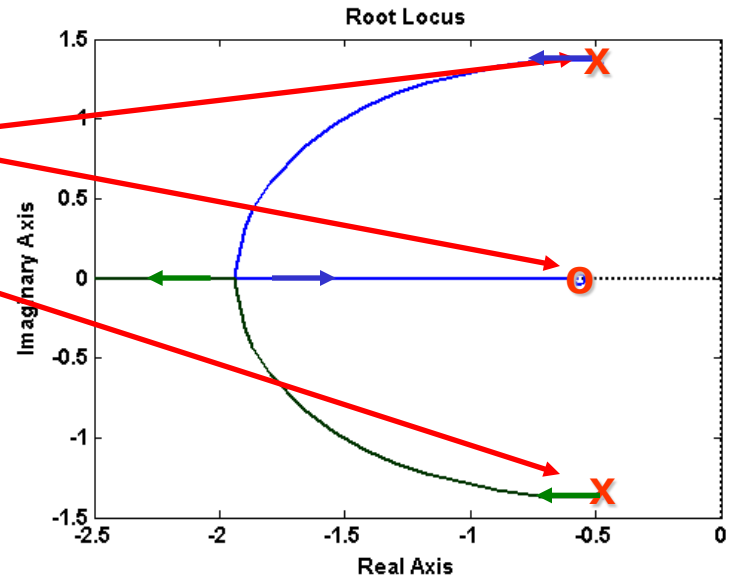
WOK: Beispiel Nickdämpfung (3)

Sprungantwort



$$G_0(s) = 4{,}81 \frac{s + 0{,}565}{s^2 + 0{,}97s + 2{,}11}$$

WOK



Strecken-Eigenschaften:

Dämpfungsgrad D = 0,337

Eigenfrequenz ω_0 = 1,44

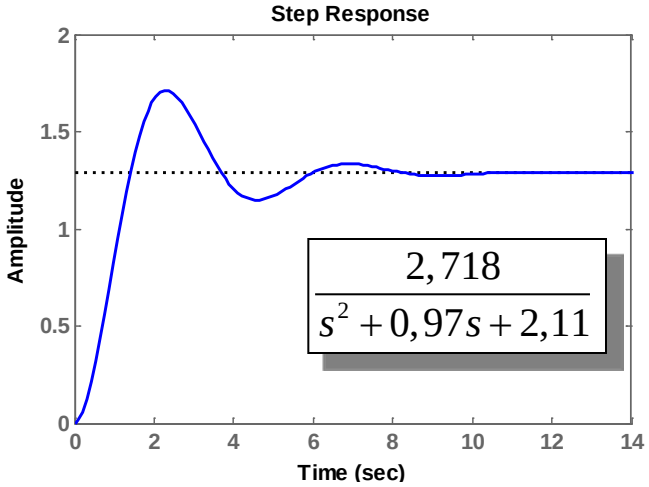
Gewünschte Eigenschaften:

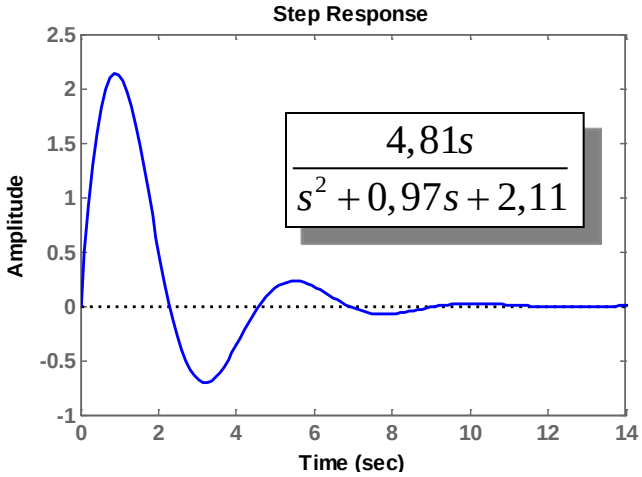
Dämpfungsgrad D **:** 0,5 - 1

Eigenfrequenz ω_0**:** 2 - 4

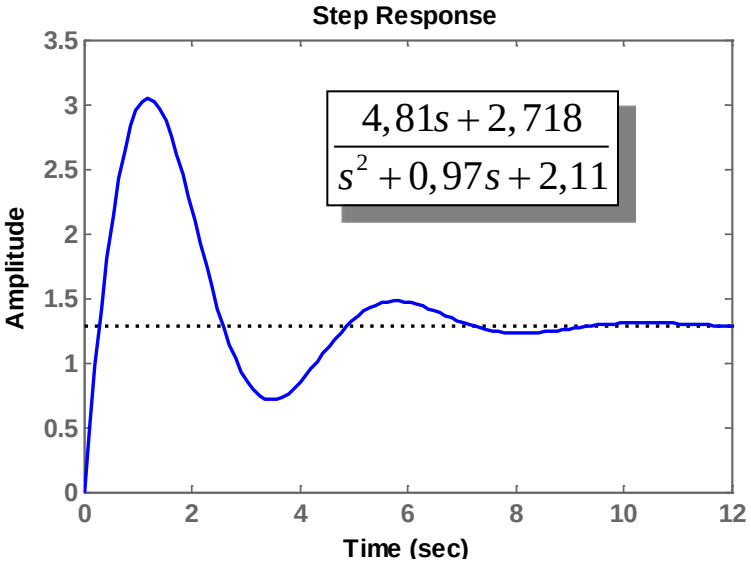
WOK: Beispiel Nickdämpfung (4)

$$G_0(s) = 4{,}81\frac{s+0{,}565}{s^2+0{,}97s+2{,}11} = \frac{4{,}81s+2{,}718}{s^2+0{,}97s+2{,}11} = \frac{2{,}718}{s^2+0{,}97s+2{,}11} + \frac{4{,}81s}{s^2+0{,}97s+2{,}11}$$





$\Rightarrow$



WOK: Beispiel Nickdämpfung (5)

```
%
% Vorlesung RT
% Beispiel: Verbesserung der Flugeigenschaften mit Hilfe der Wurzelortskurve.
%         Erhöhung der Nickdämpfung durch Rückführung der Nickgeschwindigkeit auf das Höhenruder
%         (siehe Brockhaus, R.: Flugregelung, 2001, Springer-Verlag, S. 505).
%
s=tf('s') % Definition der Üfkt. G(s) = s (Laplace-Variable)
%

%
% Parameter für Flugzustand F1 (Brockhaus 2001, Tabelle A.2.3)
%
Z_a = -0.565
M_a = -2.11
M_q = -0.405
M_e = 4.81
%
% Definition der Strecken-Übertragungsfunktion
%
G_S = M_e*(s-Z_a)/(s^2 - s*(M_q+Z_a) - M_a)

%
% Definition des Reglers
%
TD = 0.4;
T1 = 1.4;
Kr = (1+TD*s)/(1+T1*s);
Kr = 1;
```

WOK: Beispiel Nickdämpfung (6)

```
G_R = tf(Kr)

%
% Bestimmung von G_0(s)
%

G_0 = G_R * G_S

%
% Darstellung der Wurzelortskurve in Bild 1
%
figure(1)
rlocus(G_0)
axis equal
hold on
%
% Darstellung der Übergangsfunktion von Strecke und geschlossenem Regelkreis in Bild 2
%
figure(2)
step(G_0)
hold on
%
step(G_S/(1+G_0))
legend('ohne Rückkopplung','mit Rückkopplung')
```

WOK: Beispiel Nickdämpfung (7)

Die gewünschten dynamischen Eigenschaften können mit einem P-Regler nicht erzielt werden !

Lösung:

Kompensation der Streckennullstelle bei *–0,565* sowie Einfügung einer neuen Nullstelle, die weiter links liegt.

Einsatz eines PDT$_1$-Regler mit den Parametern:

$T_D = 0{,}4$ **und** $T_1 = 1{,}4$

Strecke: $n_1 = -0{,}565$

und der Übertragungsfunktion:

$$G_R(s) = \frac{1 + T_D s}{1 + T_1 s}$$

Nullstelle: $n_1 = -1/T_D = -\frac{1}{0{,}4} = -2{,}5$

Reglerpol: $p_1 = -1/T_1 = -\frac{1}{1{,}4} = -0{,}71$

WOK: Beispiel Nickdämpfung (8)

$$G_0(s) = K_R G_R(s) G_S(s)$$

$$= K_R \cdot \frac{1+T_D s}{1+T_1 s} \cdot 4{,}81 \cdot \frac{s+0{,}565}{s^2+0{,}97s+2{,}11}$$

$T_D = 0{,}4$

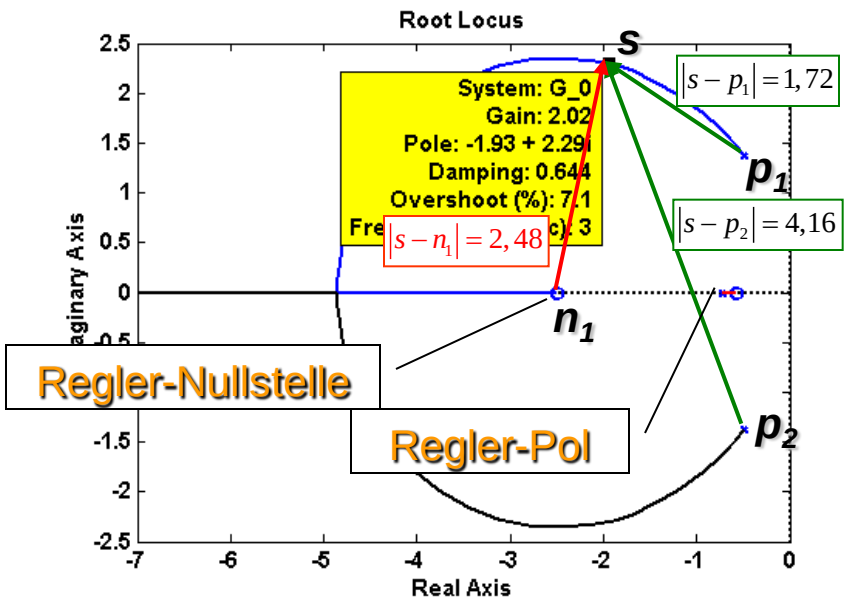
$T_1 = 1{,}4$

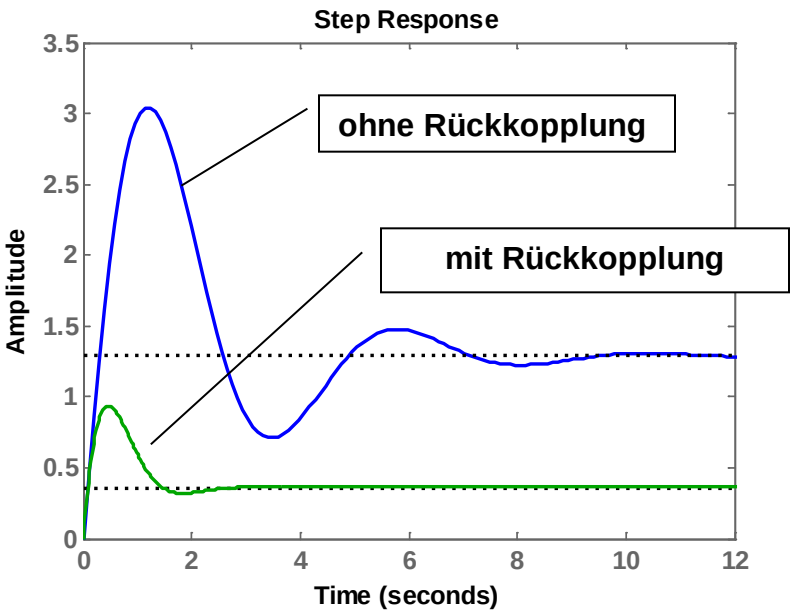
$$= K_R \frac{0{,}4}{1{,}4} \cdot \frac{s+2{,}5}{s+0{,}71} \cdot 4{,}81 \cdot \frac{s+0{,}565}{s^2+0{,}97s+2{,}11}$$

$$= k_0 \cdot \frac{s+2{,}5}{s+0{,}71} \cdot \frac{s+0{,}565}{s^2+0{,}97s+2{,}11}$$

mit $$k_0 = K_R \frac{0{,}4}{1{,}4} \cdot 4{,}81 = 1{,}37 K_R$$

WOK: Beispiel Nickdämpfung (9)





K_R = Gain = 2,02 $\Rightarrow$ $k_0 = 1,37 K_R = 1,37 \cdot 2,02 = 2,77$

Graphische Ermittlung mit Regel 12:

$$k_0 = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s - p_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s - n_i|}$$

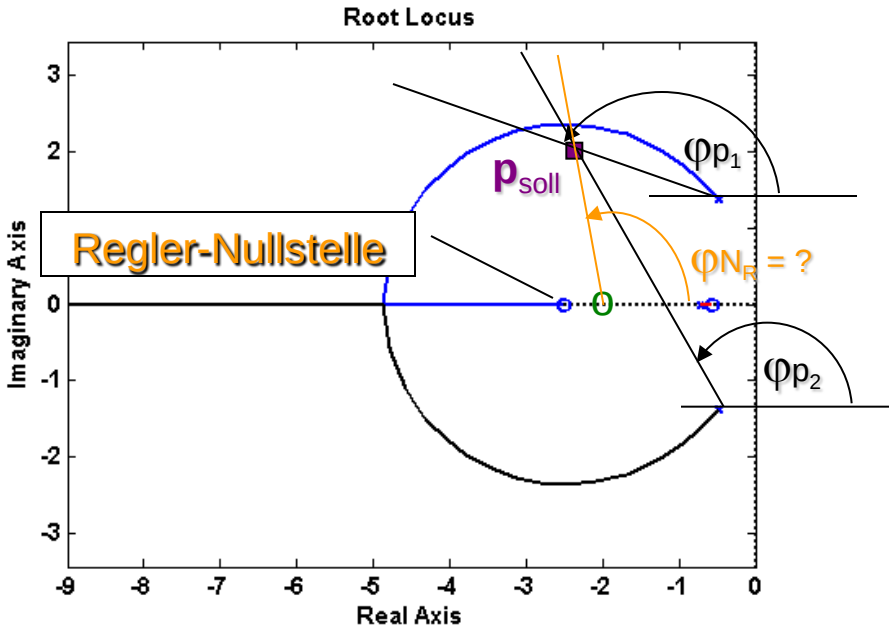
$$k_0 = \frac{1,72 \cdot 4,16}{2,48} = 2,89$$

WOK: Beispiel Nickdämpfung (10)

Vorgabe: D = 0,75 $\omega_0 = 3$ $\Rightarrow$ Pole p_1, p_2 des geschlossenen Kreises

$$\mathrm{Re}\,(p_{1,2}) = D\,\omega_0 = 0{,}75 \cdot 3 = 2{,}25$$

$$\mathrm{Im}\,(p_{1,2}) = \pm\sqrt{\omega_0^2 - (D\omega_0)^2} = \pm 1{,}95$$



Mit Hilfe der Phasenbedingung die Regler-Nullstelle so fest-legen, dass der Punkt p_{soll} auf der WOK liegt.

$$\varphi_{n_R} - \varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = 180°$$

$$\varphi_{n_R} = 180° + \varphi_{P_1} + \varphi_{P_2}$$

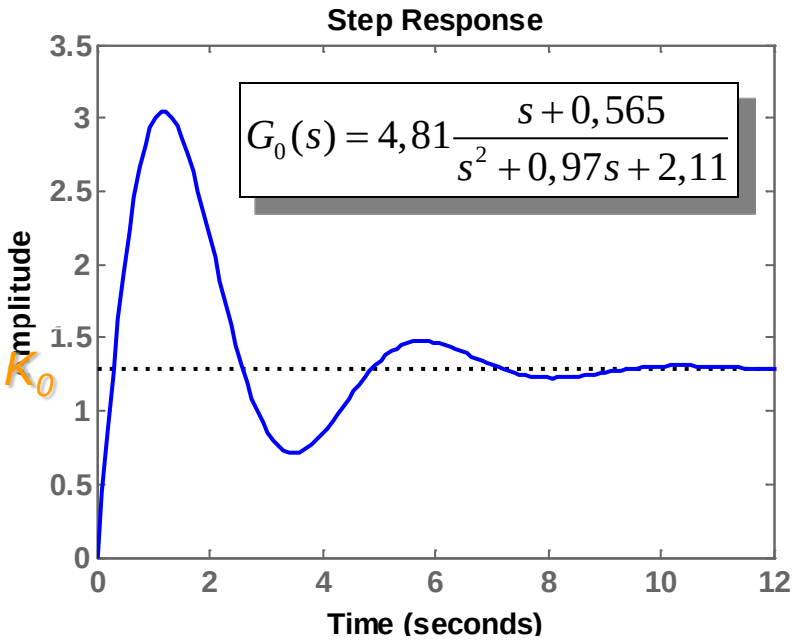
$$\varphi_{n_R} = 180° + 162° + 118°$$

$$= 460° = 360° + 100°$$

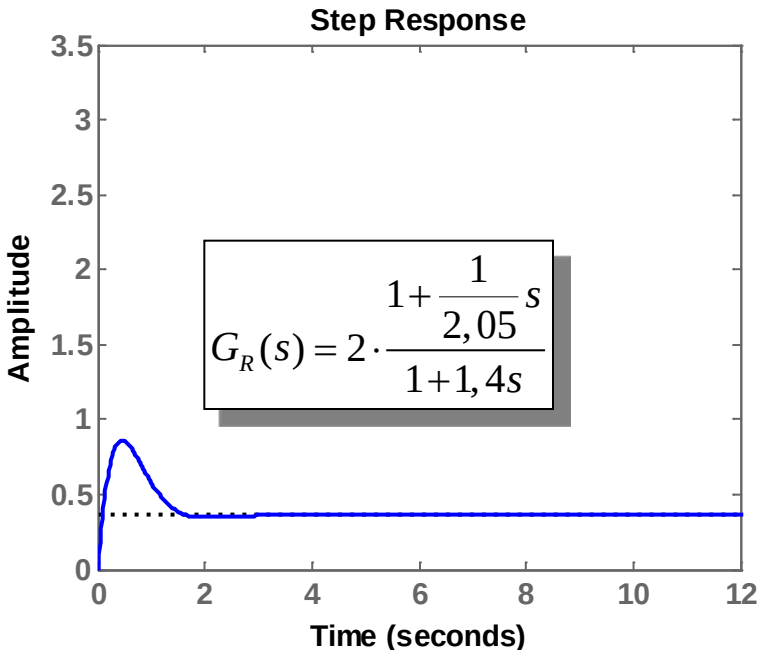
$\Rightarrow$ **Regler-Nullstelle:** $n_R = -2{,}05$

WOK: Beispiel Nickdämpfung (11)

Sprungantwort (ohne Rückführung)



Sprungantwort (mit Rückführung)



Strecken-Eigenschaften:

Dämpfungsgrad D = 0,337

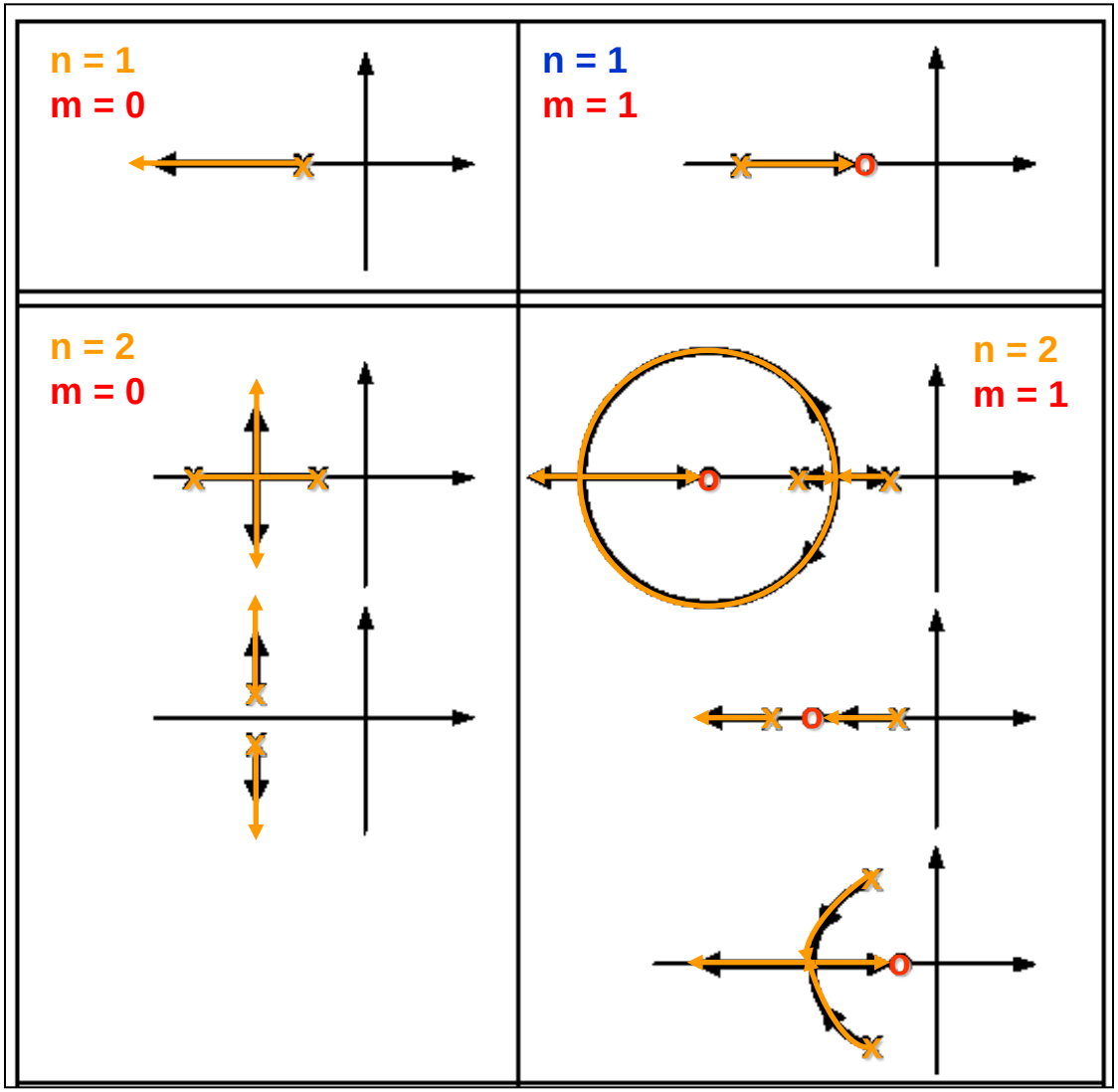
Eigenfrequenz $\omega_0 = 1{,}44$

Eigenschaften:

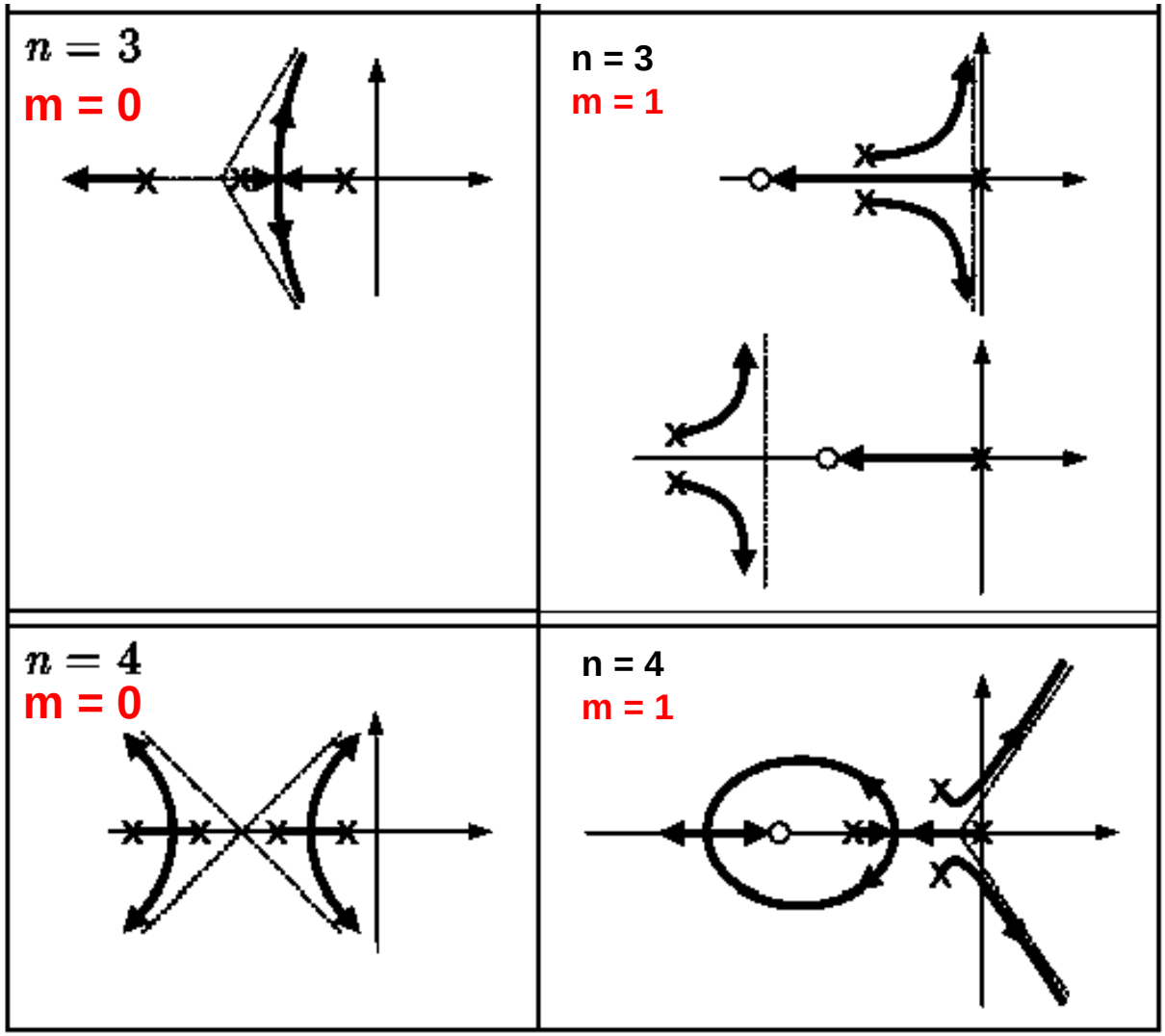
Dämpfungsgrad D ≈ 0,75

Eigenfrequenz $\omega_0 \approx 3$

WOK: Typische Beispiele



WOK: Typische Beispiele (2)



WOK: Typische Beispiele (3)

Folgerungen:

1. **Besitzt $G_0(s)$ Nullstellen in der rechten s-Halbebene, so wird der geschlossene Regelkreis für große Kreisverstärkungen immer instabil.**
2. **Diese Beschränkungen gelten auch dann, wenn der Differenzgrad (n-m) der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ größer als 2 ist.**