

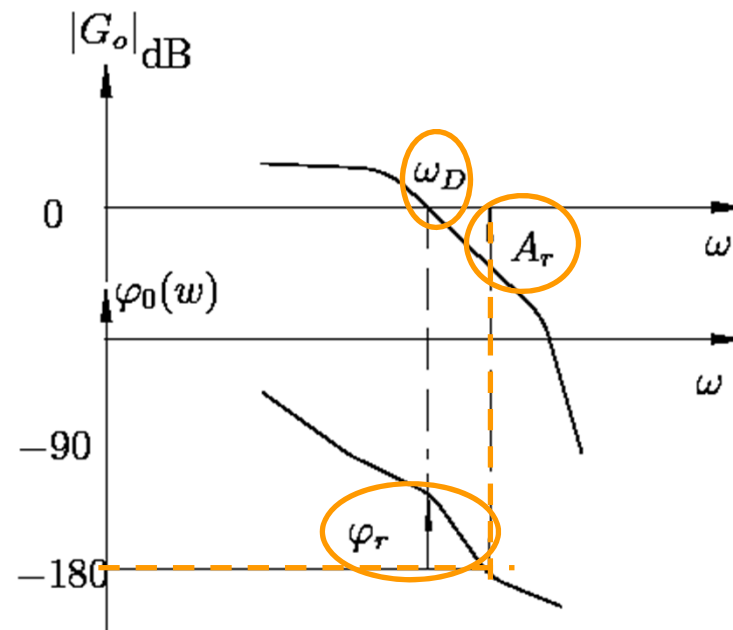
## Nyquist-Verfahren

- **Motivation**
  - Ein mathematisches Modell der Strecke ist nicht notwendig
  - Aussagen über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises anhand des Frequenzgangs  $G_0(j\omega)$
- **Grundidee** (experimentelle Stabilitätsanalyse)
- **Definition:** Kritischer Punkt
- **Vereinfachtes Nyquistkriterium**
- **Linke-Hand-Regel**
- **Vereinfachtes Nyquistkriterium im Bodediagramm**



## ➤ Definitionen der **Stabilitätsreserve**:

- **Amplitudenrand:** Abstand der Amplitudenkennlinie von der 0-dB Linie beim Winkel  $\varphi_0 = -180^\circ$ .
- **Phasenrand:** Abstand der Phasenkennlinie von der  $-180^\circ$ -Geraden bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ .



- Pole und Nullstellen des **offenen** Regelkreises sind bekannt: **Wie ändert sich die Lage der Pole, wenn der Regelkreis geschlossen wird?**
- Diese Frage kann mit Hilfe des **WOK-Verfahrens** beantwortet werden.
- Das WOK-Verfahren wurde 1948 von **Walter R. Evans** entwickelt.
- Das WOK-Verfahren ist eines der **Standardverfahren** im Bereich der **Flugregelung**.
- Die Pole des **geschlossenen** Regelkreises sind die **Wurzeln** der **charakteristischen Gleichung**

$$1 + G_0(s) = 1 + G_S(s)G_R(s) = 0$$



## Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der **Wurzelort** ist der geometrische Ort der Lösungen (Wurzeln) der **charakteristischen** Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0$$

des **geschlossenen** Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die **Wurzelortskurve (WOK)** stellt die Abhängigkeit der **Wurzelorte** von einem **Parameter** (vielfach der Verstärkung  $K_0$ ) des **offenen** Regelkreises dar.

$$1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0$$



**Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:**

$$C(s) = N_0(s) + Z_0(s)$$



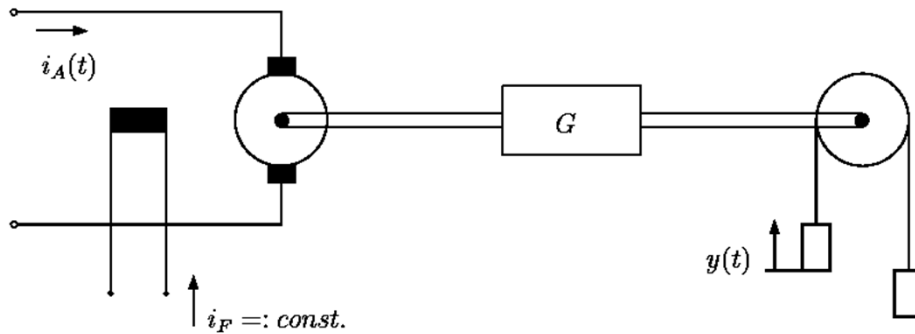


Bild 2.34: Geräteplan eines Förderantriebes

**Dgl.:**  $\Theta \ddot{y}(t) + B \dot{y}(t) = u(t)$

**Übertragungsfunktion**

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/B \cdot K_S}{s \left(1 + \frac{\Theta}{B}s\right)}$$

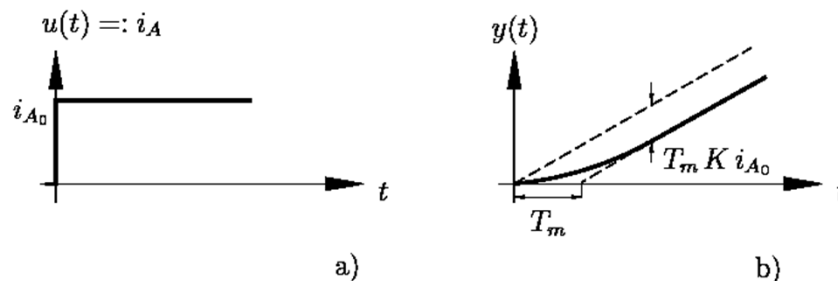


Bild 2.35: Übergangsverhalten des Förderantriebes in Bild 2.34:  
a) Sprungförmige Erregung b) Sprungantwort

**P-Regler:**  $G_R(s) = K_R$

**Üfkt des offenen Kreises**

$$G_0(s) = K_R \cdot \frac{K_S}{s} \frac{1}{1 + sT} = K_0 \frac{1}{s(1 + sT)}$$

**Verstärkung des PT<sub>1</sub>-Anteils**



## Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises:

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\cancel{Z_0(s)} / \cancel{N_0(s)}}{1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)}} = \frac{Z_0(s)}{\cancel{N_0(s)} \left( \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{\cancel{N_0(s)}} \right)} = \frac{Z_0(s)}{N_0(s) + Z_0(s)} = \frac{K_0}{s(1 + sT) + K_0} = \frac{Z_w(s)}{N_w(s)}$$

## Charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises:

$$C(s) = N_w(s) = Ts^2 + s + K_0 = 0$$

mit den Wurzeln:

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\frac{1}{4T^2} - \frac{K_0}{T}}$$



$$s_{1/2} = -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\frac{1}{4T^2} - \frac{K_0}{T}}$$

i) für  $K_0 = 0$  :  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = -\frac{1}{T}$

ii) für  $K_0 = 1/4T$  :  $s_{1/2} = -\frac{1}{2T}$

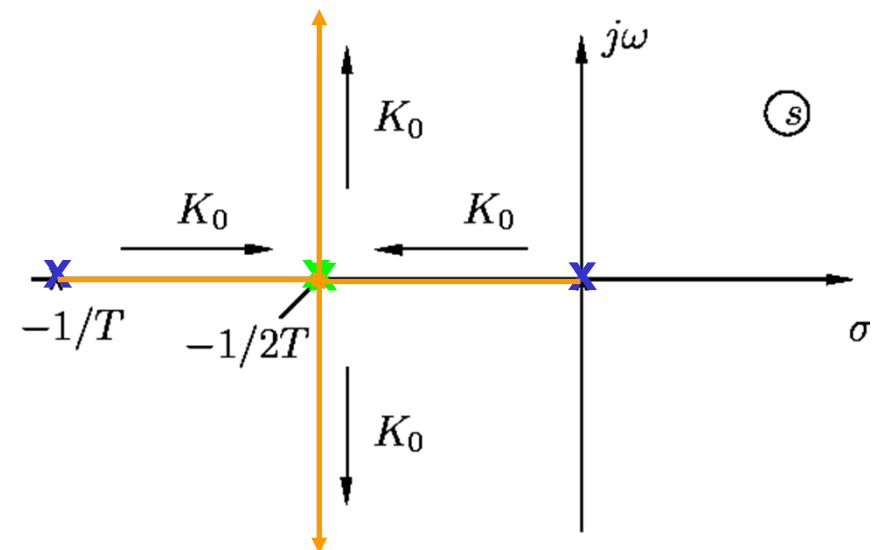
iii) für  $K_0 > 1/4T$  :

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2T} \pm j \frac{1}{2T} \sqrt{4K_0T - 1}$$

Wurzelort für  $K_0 = 0$

Wurzelort für  $K_0 = 1/4T$

Wurzelorte für  $K_0 > 1/4T$



Wurzelorte für  $0 \leq K_0 \leq \infty$  bilden die Wurzelortskurve



## Interpretation der WOK

- Die WOK zeigt die Bewegungen der Pole des **geschlossenen** Regelkreises in Abhängigkeit von der **Kreisverstärkung**  $K_0 = K_R \cdot K_S$ .
- Aus der WOK kann man erkennen, wie sich die **dynamischen** Eigenschaften des **geschlossenen** Kreises bei Erhöhung der **Reglerverstärkung** verändert.
  - Der geschlossene Kreis ist für  $K_0 > 0$  immer **stabil**.
  - Mit zunehmender **Verstärkung**  $K_0 > 1/4T$  nimmt die **Eigenfrequenz**  $\omega_0$  zu und die **Dämpfung**  $D$  ab.





Übertragungsfunktion des offenen Kreises in Pol-Nullstellen-Form:

$$G_0(s) = k_0 \hat{G}_0(s) = k_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Alle  $s$ -Werte, die diese Gleichung erfüllen sind Pole des Regelkreises

Charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises:

$$1 + k_0 \hat{G}_0(s) = 0$$

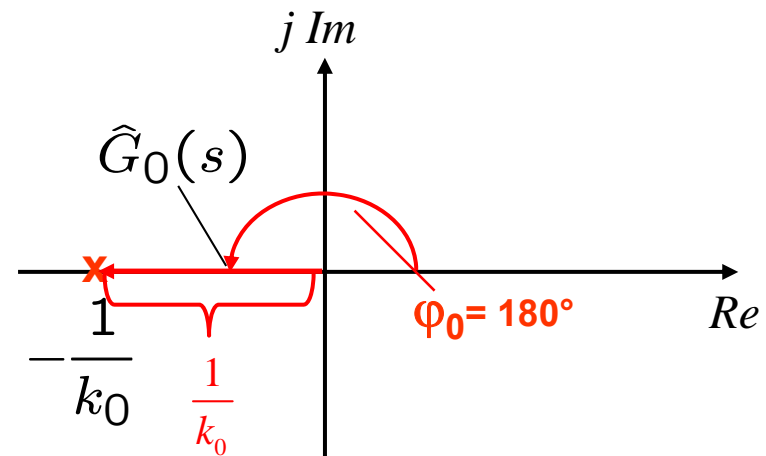


$$\hat{G}_0(s) = \frac{(s - n_1) \cdots (s - n_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = -\frac{1}{k_0}$$

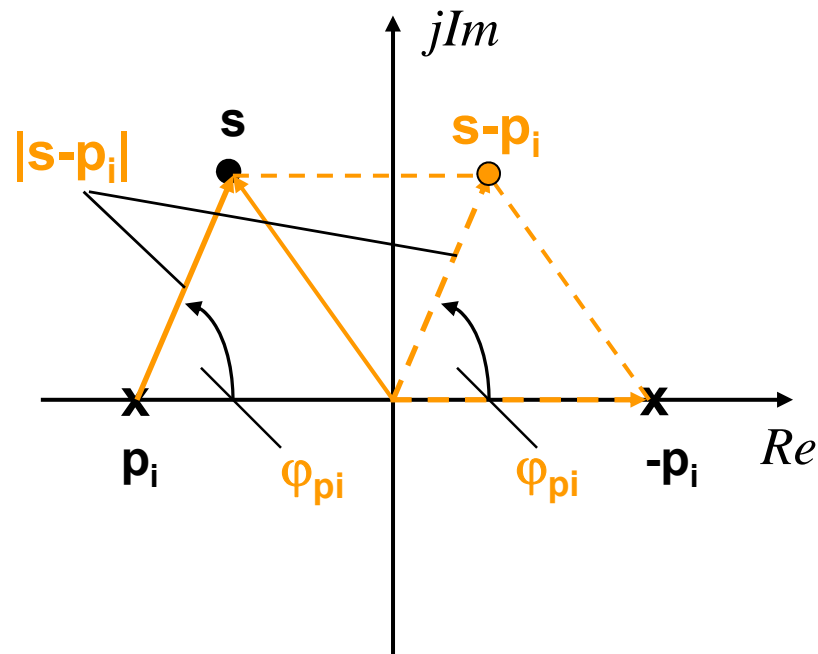
in Exponentialform:

$$|\hat{G}_0(s)| e^{j\varphi_0(s)} = -\frac{1}{k_0}$$

$$\underbrace{1}_{\frac{1}{k_0}} \underbrace{\pm \pi}$$



## Betrachtung des Linearfaktors $(s-p_i)$



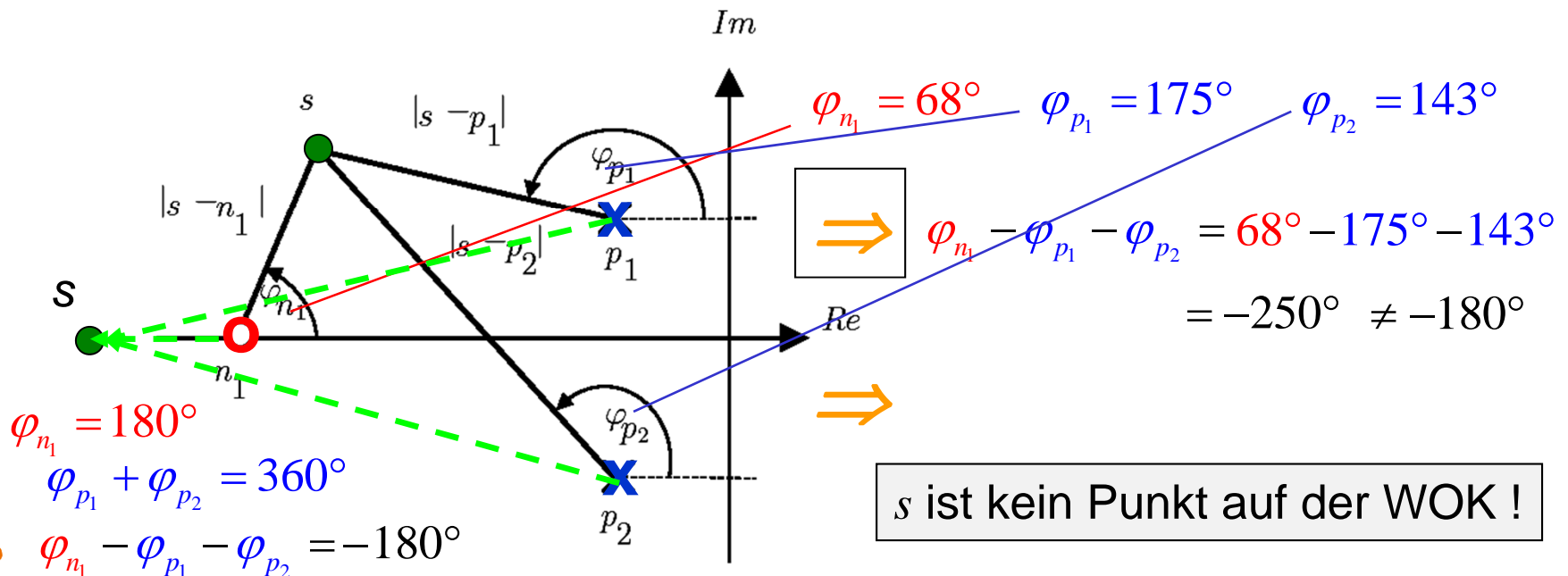
Länge und Orientierung des komplexen Zeigers  $s-p_i$  erhält man einfach durch Zeichnen eines Zeigers von  $p_i$  nach  $s$ .



Amplitudenbedingung:  $|\hat{G}_0(s)| = \frac{\prod_{i=1}^m |s - n_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{k_0}$

Phasenbedingung ist **nicht** von  $k_0$  abhängig !!!!

Phasenbedingung:  $\varphi_0(s) = \sum_{i=1}^m \varphi_{n_i} - \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} = \pm(2k + 1)\pi = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \dots$



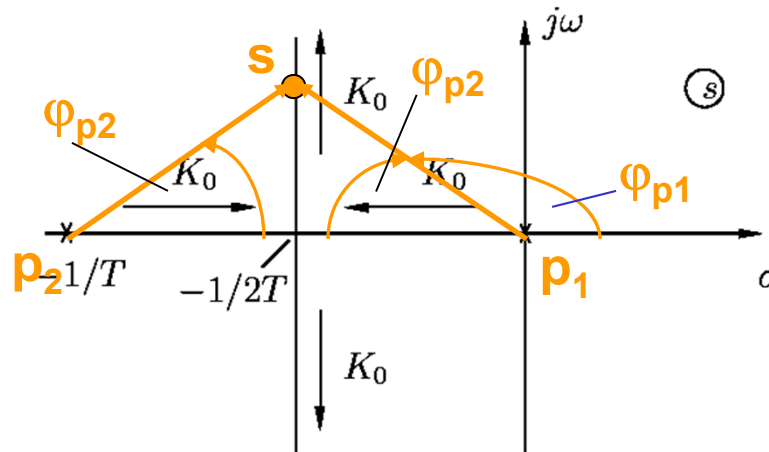
**Die Winkelbedingung ist unabhängig von  $k_0$ :**

## Satz 2.5

Die Wurzelortskurve eines Systems ist der geometrische Ort aller Punkte der  $s$ -Ebene, für die die Summe der Pol- und Nullstellenwinkel der Übertragungsfunktion des offenen Systems  $\pm 180^\circ(2k + 1)$  beträgt.

$$\sum_{i=1}^m \varphi_{n_i} - \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad .$$

Alle Pole der Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises liegen auf den WOKn. □



$$\varphi_{p1} + \varphi_{p2} = 180^\circ$$



**Phasenbedingung ist erfüllt !!!**



Systemverstärkung  $K$  für Systeme mit Ausgleich:

$$K = G(s) \Big|_{s=0}$$

Beispiel:

$$G(s) = \frac{K(1+T_3s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad \longrightarrow \quad G(0) = K$$

Pol-Nullstellendarstellung

$$G(s) = \frac{K \cdot T_3 \cdot (s + 1/T_3)}{T_1 \cdot T_2 \cdot (s + 1/T_1)(s + 1/T_2)}$$

$$= k_0 \frac{(s - n_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Allgemein gilt:

$$k_0 = K \frac{\prod_{l=1}^n -p_l}{\prod_{i=1}^m -n_i}$$

mit  $n_1 = -1/T_3$ ,  $p_1 = -1/T_1$ ,  $p_2 = -1/T_2$

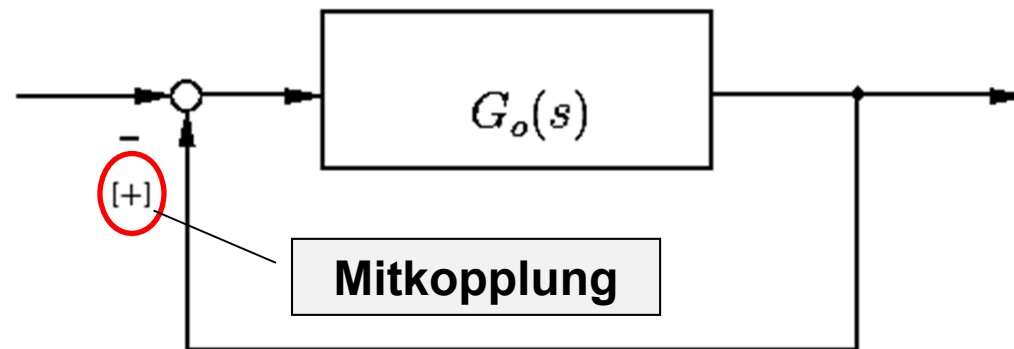
und  $k_0 = \frac{K \cdot T_3}{T_1 T_2}$



$$G_0(s) = k_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad \text{mit } k_0 \geq 0$$

$m$  = Anzahl der im Endlichen liegenden Nullstellen

$n$  = Anzahl der im Endlichen liegenden Pole.



**Bild 2.40:** Regelkreis mit Einheitsrückführung

## Start- und Endpunkte der WOK

Die  $n$  Äste der WOK beginnen für  $k_0 = 0$  in den Polen  $p_i$  des offenen Systems  $G_0(s)$ .  $m$  Äste enden für  $k_0 \rightarrow \infty$  in den endlichen Nullstellen  $n_i$  von  $G_0(s)$ , während die verbleibenden  $(n - m)$  Äste gegen Unendlich laufen (man kann auch sagen, daß diese Äste in der Nullstelle im Unendlichen der Vielfachheit oder Ordnung  $(n - m)$  enden).  $\square$

## Winkel der Asymptoten

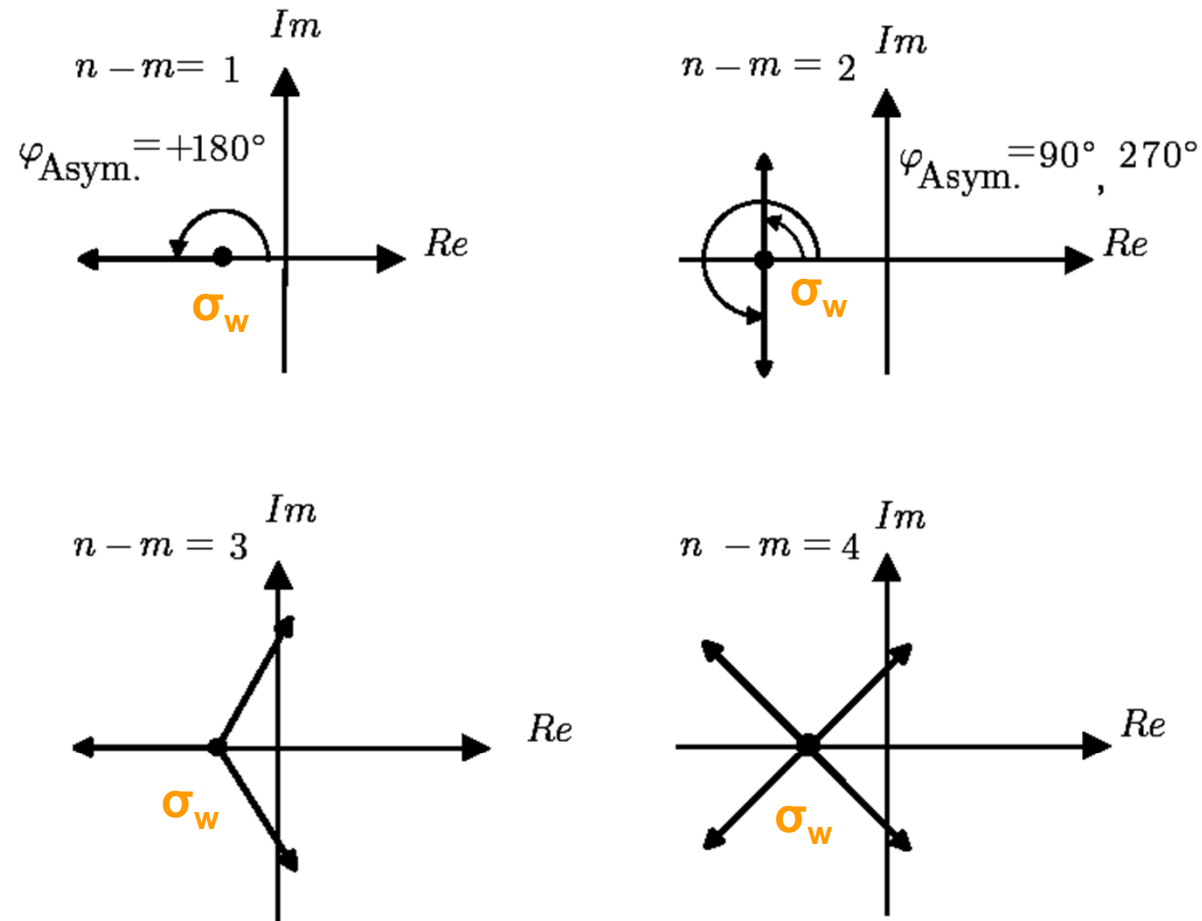
Die *Asymptoten* der  $(n - m)$  nach Unendlich strebenden Äste der WOK sind Geraden, die sich für  $(n - m) \geq 2$  alle im *Wurzelschwerpunkt*

$$\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m n_i}{n - m}$$

auf der reellen Achse schneiden. Sie haben zur reellen Achse die Neigungswinkel

$$\varphi_k = \frac{(2k - 1)180^\circ}{n - m}, \quad k = 1, 2, \dots, n - m .$$





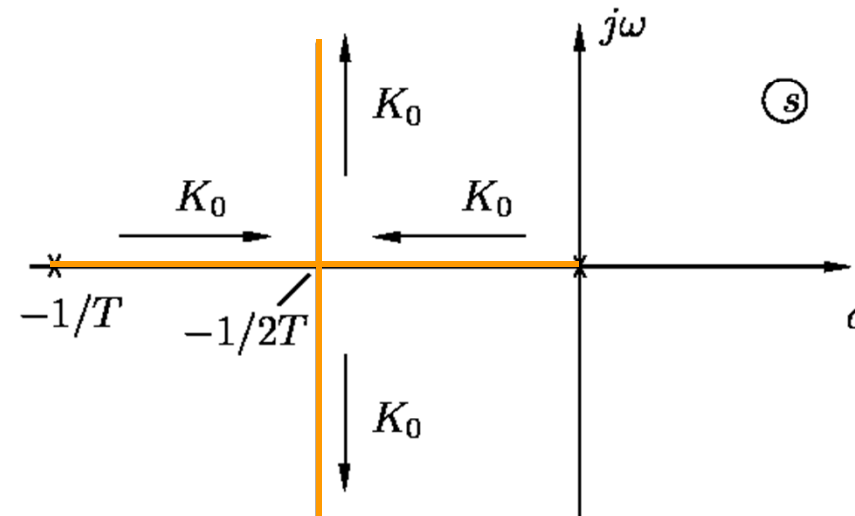
**Bild 2.39:** Asymptoten der WOK für unterschiedliche Differenzgrade ( $n - m$ ) von  $G_0(s)$





## Wurzelorte auf der reellen Achse

Zur WOK gehören genau diejenigen reellen Werte  $s$ , für die die Anzahl der von diesem Punkt  $s$  aus gesehen rechts liegenden Pole und Nullstellen des offenen Kreises ungerade ist. □



## Symmetrie der WOK

Die WOKn verlaufen symmetrisch zur reellen Achse. □



**Gegeben:**

$$G_0(s) = k_0 \frac{1}{s(s+1)}$$

**Gesucht: WOK**

Anzahl  $n$  der Pole: 2

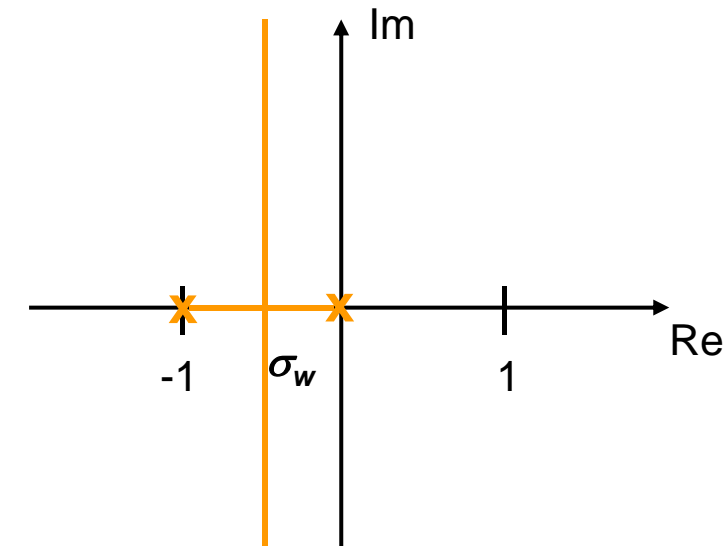
Anzahl  $m$  der Nullstellen: 0

Bestimmen und einzeichnen der Pole:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -1$

Regel 3: WOK auf der reellen Achse

Regel 5 und 7: Anzahl  $n-m = 2$  und Winkel der Asymptoten ( $90^\circ$ ,  $270^\circ$ )

Regel 8: Schnittpunkt der Asymptoten



$$\sigma_w = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m n_i}{n - m} = \frac{0 + (-1)}{2} = -\frac{1}{2}$$



1	Anfangspunkte	Die WOK beginnt für $k_0 = 0$ in den Polen von $G_0$ .
2	Endpunkte	Die WOK endet für $k_0 \rightarrow \infty$ in den Nullstellen von $G_0$ .
3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von Polen und Nullstellen ungerade [gerade] <sup>2</sup> ist, ist ein Wurzelort.
4	Anzahl der separaten Äste	Die WOK besteht aus $n$ Ästen.
5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$n - m$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n - m$ Asymptoten.
6	Symmetrie der WOK	Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse.

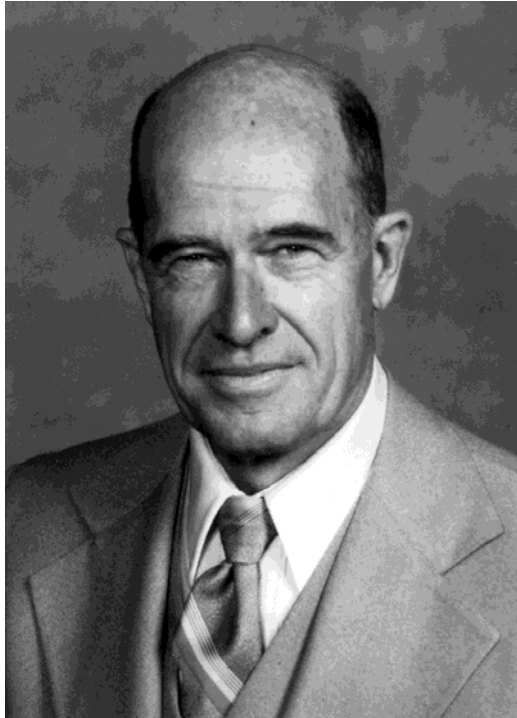
<sup>2</sup> Die Angaben in eckigen Klammern gelten für positive Rückführung.



7	Winkel der Asymptoten	<p>Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus</p> $\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[ \varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n-m.$
8	<p>Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt <math>\sigma_W</math>)</p>	<p>Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse.</p> $\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m n_i}{n-m} \quad \text{für } n-m \geq 2$
9	Austritts- und Eintrittswinkel	<p>Der Austrittswinkel <math>\Theta</math> der WOK aus einem Pol (oder Eintrittswinkel in eine Nullstelle) ergibt sich, indem man einen Punkt <math>s_1</math>, der auf der WOK liegen soll, in unmittelbarer Nähe des Poles (bzw. der Nullstelle) annimmt und dann die Winkelbedingung ansetzt:</p> $\sum_{i=1}^m \arg(s_1 - n_i) - \sum_{i=1}^n \arg(s_1 - p_i) = \pm(2k-1)\pi \quad [\pm 2k\pi]$

10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	<p>Allgemein gilt am Verzweigungspunkt <math>a</math>: <math>\frac{dG_0(s)}{ds} \Big _{s=a} = 0</math></p> <p>Für <math>a \neq p_i</math> und <math>a \neq n_i</math> gilt damit:</p> <p>a) reelle Pole und Nullstellen</p> $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{a - n_i}$ <p>b) konjugiert komplexe Pole und Nullstellen</p> $n_i = \alpha_i \pm j \cdot \beta_i ; p_i = \alpha_l \pm j \cdot \beta_l$ $\sum_{i=1}^{m/2} \frac{2(a - \alpha_i)}{(a - \alpha_i)^2 + \beta_i^2} = \sum_{l=1}^{n/2} \frac{2(a - \alpha_l)}{(a - \alpha_l)^2 + \beta_l^2}$
11	Schnittpunkt mit der imaginären Achse	Stabilitätsgrenze des geschlossenen Kreises: $k_{0_{krit}}$ und $\omega_{krit}$ , z. B. mit Hurwitz-Kriterium
12	$k_0$ -Parametrierung der WOK	<p>Die Verstärkung für einen Punkt <math>s_1</math> der WOK ergibt sich aus:</p> $k_0 = \frac{\prod_{i=1}^n  s_1 - p_i }{\prod_{i=1}^m  s_1 - n_i }$ <p>(Falls keine Nullstellen auftreten, ist der Nenner gleich 1 zu setzen.)</p>
13	Potential-Analogie	Die WOK verläuft beim Austritt aus der reellen Achse konkav zu benachbarten Nullstellen von $G_0(s)$ , bzw. konvex zu benachbarten Polen.





<b>15. Januar 1920</b>	<b>geb. in St. Louis, Missouri</b>
<b>1941</b>	<b>B.S. in Electrical Engineering, Washington University in St. Louis</b>
<b>1942 – 1944</b>	<b>General Electric Company</b>
<b>1946 – 1948</b>	<b>Instructor, Washington University</b>
<b>1948</b>	<b>Entwicklung des WOK- Verfahrens</b>
<b>1951</b>	<b>M.S. in Electrical Engineering, University of California</b>
<b>1952 – 1980</b>	<b>Tätigkeit in verschiedenen Firmen (Autonetics, Ford Aeronautic Company)</b>
<b>10. Juli 1999</b>	<b>gestorben in Whittier, CA</b>

## Kartesische Koordinaten

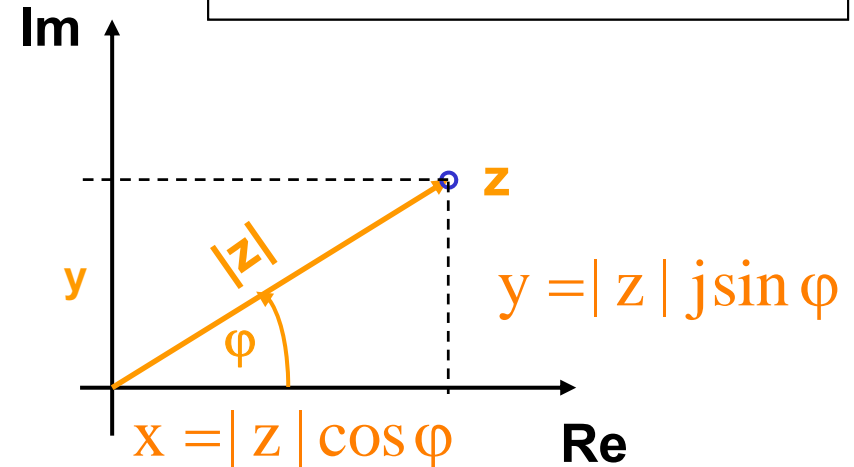
$$z = x + jy$$

Darstellung als **Zeiger** (Vektor) in der komplexen Zahlenebene (Gaußschen Zahlenebene).

## Polarkoordinaten

$$z = |z| (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

## Gaußsche Zahlenebene



## Exponentialform

Aus der Eulersche Identität

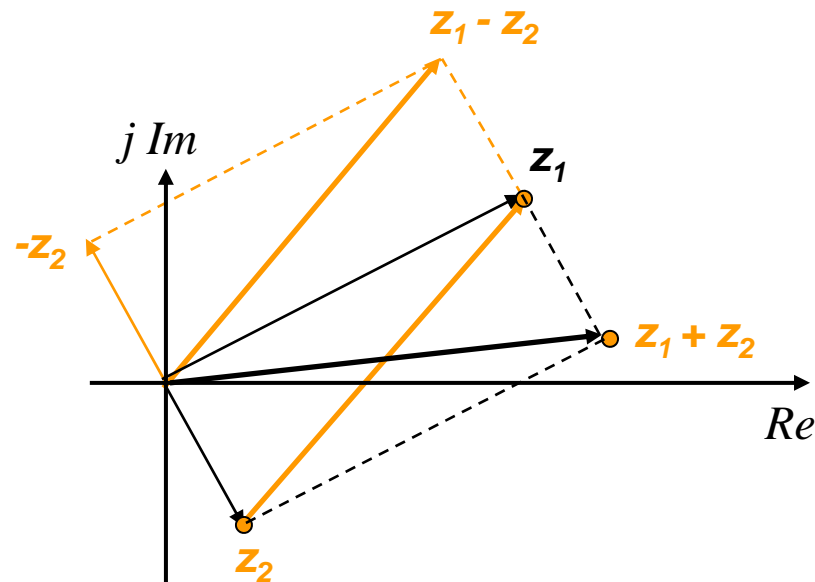
$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

folgt  $z = |z| e^{j\varphi} = |z| e^{j\angle z}$



## Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{aligned}$$



## Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) \\ &= r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

