Zusammenstellung wichtiger Vorlesungsfolien aus SRT für die weiterführenden RT-Veranstaltungen (Januar 2014)

Negative Feedback Amplifier

Harold S. Black (1898-1983)

Aufbau eines transkontinentalen Telefonnetzes mit 4 Kanälen im Jahr 1923 durch AT&T

Problem: Verzerrungen in Reihenschaltungen von Röhrenverstärker durch Nichtlinearitäten und Verstärkungsänderungen.

Lösung: Negative Feedback Amplifier

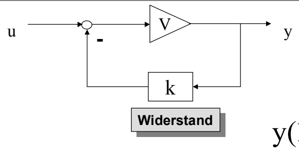
Patent eingereicht 1928

Verstärker werden ab 1931 eingesetzt

Patent erteilt 1937

Negative Feedback Amplifier

Verstärker mit negativer Rückführung



$$y = V(u - ky)$$

$$y = Vu - kVy$$

$$y(1 + kV) = Vu$$

$$K = \frac{y}{u} = \frac{V}{1 + kV}$$

Für $kV >> 1$ **folgt:**

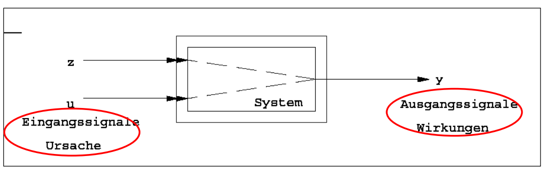
$$K = \frac{y}{u} \approx \frac{V}{kV} = \frac{1}{k}$$

Verstärkung des rückgeführten Verstärkers

Bezeichnungen und Definitionen (2)

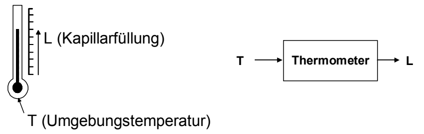
Definition: Dynamisches System

Ein dynamisches System stellt eine Funktionseinheit zur Verarbeitung und Übertragung von Signalen dar, wobei die Systemeingangsgrößen als Ursache und die Systemausgangsgrößen als deren zeitliche Auswirkungen zueinander in Relation gebracht werden. (Unbehauen 2000)



Bezeichnungen und Definitionen (3)

Thermometer als dynamisches System



Eingangsgröße:	**Temperatur T**
Innere Größen:	**Quecksilbertemperatur, Quecksilbervolumen**
Ausgangsgröße:	**Kapillarfüllung L (Skalenanzeige)**

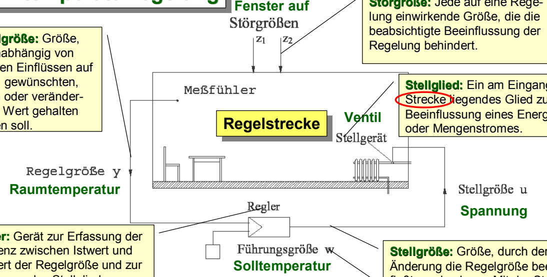
Bezeichnungen und Definitionen (4)

Raumtemperaturregelung

Regelgröße: Größe, die unabhängig von äußeren Einflüssen auf einem gewünschten, festen oder veränderlichen Wert gehalten werden soll.

Störgröße: Jede auf eine Regelung einwirkende Größe, die die beabsichtigte Beeinflussung der Regelung behindert.

Stellglied: Ein am Eingang der Strecke liegendes Glied zur Beeinflussung eines Energie– oder Mengenstromes.



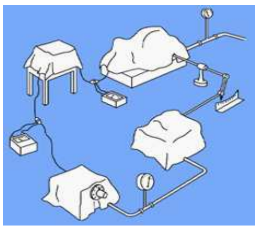
Regler: Gerät zur Erfassung der Differenz zwischen Istwert und Sollwert der Regelgröße und zur Betätigung des Stellgliedes.

Führungsgröße: Größe, die der Regeleinrichtung von außen zugeführt wird und der die Regelgröße folgen soll

Stellgröße: Größe, durch deren Änderung die Regelgröße beeinflußt werden kann. Mit der Stellgröße wird der Energie– und/oder Materialfluß in die Regelstrecke beeinflußt.

Black Box Konzept

- **Konzentration auf das Wesentliche**
- **Focus auf Übertragungsverhalten**
- **Informationen werden versteckt**
- **Verschiedene Abstraktionsebenen**

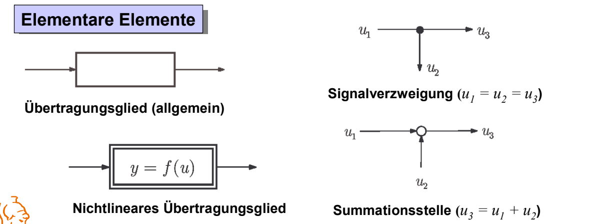


Beschreibung mit Hilfe von Blockschaltbildern (MIT 1948)

Blockschaltbild

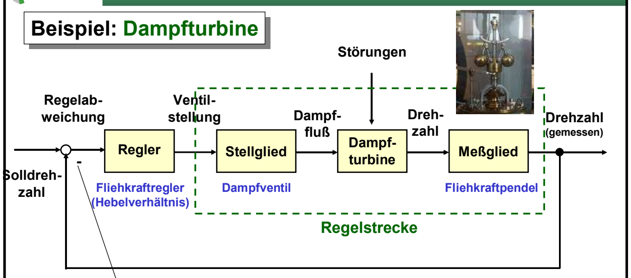
- Das Blockschaltbild (oder der Signalflußplan) ist ein **Signalflußdiagramm** zur Darstellung des Signalflusses und des Wirkungszusammenhangs in einem Regelkreis.
- Mit Hilfe des Blockschaltbildes wird eine von allen **technischen Details abstrahierte** Darstellung des Regelungsproblems gewonnen.

Elementare Elemente



Blockschaltbild (4)

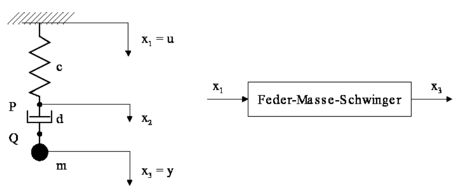
Beispiel: Dampfturbine



Rückführung muß der Änderung der Drehzahl **entgegenwirken**

Drehzahl kleiner ⇒ Dampffluß größer

Beispiel: Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger



Zusammenhang zwischen u(t) und y(t) wird durch folgende DGL beschrieben:

$$\frac{m}{c}\ddot{y}(t) + \frac{m}{d}\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Beispiel: Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger (2)

Lösen einer Differentialgleichung mit Hilfe eines Analogrechners

Schritt 1:

Auflösen der Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung

$$\boxed{\frac{m}{c}\ddot{y}(t)+\frac{m}{d}\dot{y}(t)+y(t)=u(t)} \quad \cdot\frac{c}{m}$$

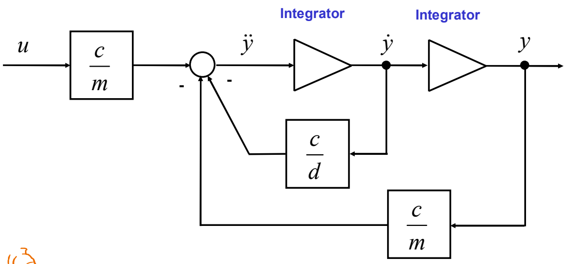
$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{y}(t)+\frac{c}{d}\dot{y}(t)+\frac{c}{m}y(t)=\frac{c}{m}u(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{y}(t)=-\frac{c}{d}\dot{y}(t)-\frac{c}{m}y(t)+\frac{c}{m}u(t)}$$

Beispiel: Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger (3)

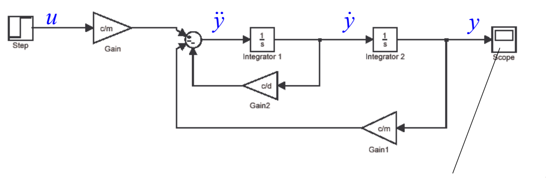
Schritt 2:

Aufstellen der Analogrechnerschaltung

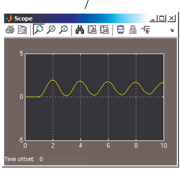


Beispiel: Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger (4)

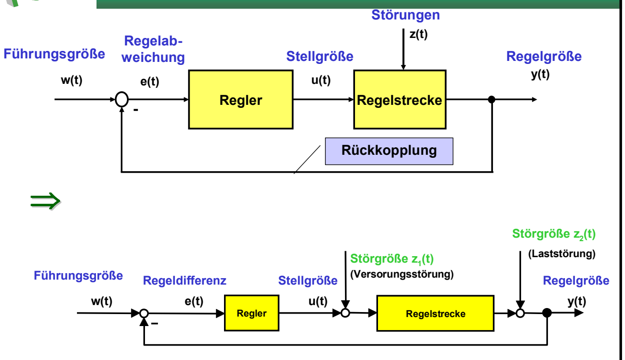
Simulink-Modell



Simulationsergebnis für
m = 1, c = 10, d = 100



Grundstruktur einer Regelung



Störgrößen- und Folgeregelung

Eine Regelung kann verschiedene Ziele verfolgen:

- Veränderung der dynamischen Eigenschaften eines Systems (Stabilisierung, Dämpfung, Schnelligkeit, Robustheit).
- Ausgleichen von Störungen (Raumheizung, Dampfturbine, Tempomat, Körpertemperatur, ...).

  Störgrößenregelung

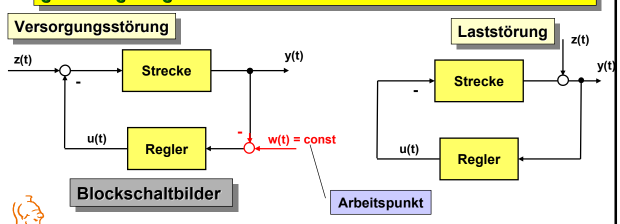
- Regelgröße dem zeitlichen Verlauf der Führungsgröße anpassen (Werkzeugmaschinen, Nachführen von Antennen, Kurshaltung,...).

  Folgeregelung

Störgrößen- und Folgeregelungen (2)

Störgrößenregelung

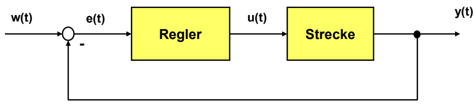
Bestimmte Größen eines Systems, die Regelgrößen, sollen vorgegebene feste Sollwerte einhalten, ohne daß die Störungen, die auf das System einwirken, von nennenswertem Einfluß sind. Eine derartige Regelung wird als Festwertregelung oder Störgrößenregelung bezeichnet.



Störgrößen- und Folgeregelungen (3)

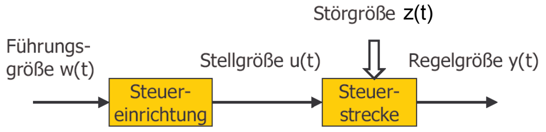
Folgeregelung

Oftmals müssen die Regelgrößen eines Systems sich den ändernden Sollwerten möglichst gut nachgeführt werden. Diese Regelungsart wird **Folgeregelung** oder **Nachlaufregelung** genannt. In diesem Fall wird die sich ändernde Sollgröße treffender als **Führungsgröße** bezeichnet.



Blockschaltbild

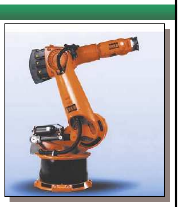
Grundstruktur einer Steuerung

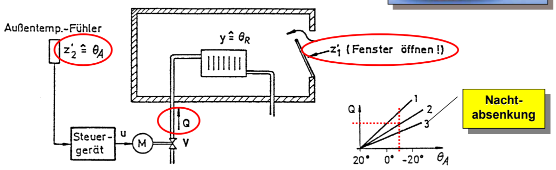


- Offene Wirkungskette (feedforward control, open loop control)
- Steuereinrichtung erhält keine Informationen über Störungen
- Dynamische Eigenschaften der Steuerstrecke müssen genau bekannt sein

Beispiele für Steuerungen

- **Mikrowelle**
- **Abfüllautomat**
- **Robotersteuerungen**
- **Raumtemperatursteuerung**





Wann sind Regelungen notwendig?

- **Wenn nicht meßbare Störungen auszugleichen sind.**
- **Wenn die Dynamik der Regelstrecke zu verändern ist (Stabilisierung instabiler System).**
- **Die Steuerungsaufgaben trotz veränderter Eigenschaften der Regelstrecke zu erfüllen sind.**
- **Die Regelstrecke nicht ausreichend genau bekannt ist.**

Gegenüberstellung: Steuerung und Regelung

Steuerung

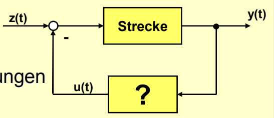
- Offene Wirkungskette
- Die Strecke muß genau bekannt sein
- Kann auf Störungen nicht reagieren
- Kein Soll-Ist-Vergleich
- Keine Sensoren notwendig
- Stabilität der Strecke wird nicht verändert

Regelung

- Geschlossener Regelkreis
- Die Strecke muß nicht genau bekannt sein (Robustheit gegenüber Parameteränderungen)
- Kann Störungen ausregeln (Störkompensation)
- Soll-Ist-Vergleich
- Sensoren sind notwendig
- Der geschlossene Regelkreis kann instabil werden

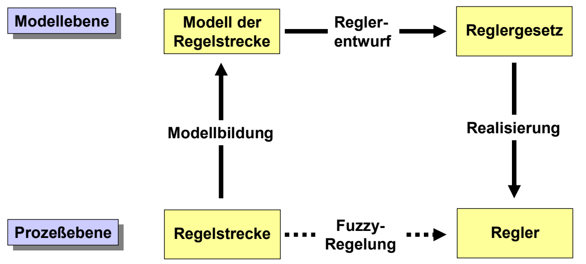
Vorbereitungsphase

- **Modellbildung**
  - Modell der Regelstrecke
  - Modell der Güteanforderungen



- **Analyse der Regelstrecke**
  - Stabilität, Dämpfung, Steuer- und Beobachtbarkeit
- **Auswahl der Reglerstruktur**
  - Reglerordnung, Meß- und Stellgrößen
- **Festlegung der Reglerparameter**
- **Erprobung des Reglers in der Simulation**
  - Überprüfung der Güteanforderungen mit Matlab/Simulink

Vorgehensweise bei Regelungsaufgaben



Modellbildung

Analytisch: Aufstellen der Systemgleichungen unter Verwendung bekannter physikalischer und /oder chemischer Gesetze

- **Modellierung im Zeitbereich**
  - Differentialgleichungen höherer Ordnung
  - Zustandsraummodelle (Differentialgleichungen 1-ter Ordnung)
- **Modellierung im Frequenzbereich**
  - Differentialgleichungen werden mit Hilfe der Laplace-Transformation zu algebraischen Gleichungen
  - Übertragungsfunktion

Experimentell: Messung der Antwort der Regelstrecke auf geeignete Testsignale

Lineare Systeme

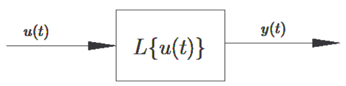


Bild 2.2: Lineares Übertragungssystem $L\{u(t)\}$

Lineare Übertragungsoperation: $y(t) = L\{u(t)\}$

Definition 2.1
Ein System heißt **linear**, wenn für die Ursache–Wirkung–Beziehung zwischen Ein– und Ausgang das **Superpositionsprinzip** gültig ist. □

Lineare Systeme (2)

Definition 2.2
Ein System ist dann und nur dann linear, wenn aus

$$y(t) = L\{u(t)\} \qquad (2.1)$$

$$\text{mit} \quad u(t) = \sum_{\nu=1}^{r} a_\nu u_\nu(t) \qquad \boxed{r = 2} \qquad \boxed{u(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)} \qquad (2.2)$$

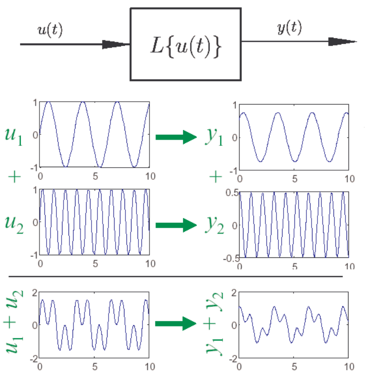
$$\text{folgt:} \quad y(t) = \sum_{\nu=1}^{r} a_\nu y_\nu(t) \qquad \boxed{y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)} \qquad (2.3)$$

$$\text{mit} \quad y_\nu(t) = L\{u_\nu(t)\} \qquad \boxed{y_1(t) = L\{u_1(t)\}} \quad \boxed{y_2(t) = L\{u_2(t)\}}$$

$$\boxed{y(t) = L\{u(t)\}}$$

Im weiteren wird vorausgesetzt, daß das Verhalten der betrachteten Systeme linear ist !!!!

Lineare Systeme (2a)



Linearisierung nichtlinearer Systeme

Voraussetzungen

- **Es werden nur kleine Abweichungen um feste Arbeitspunkte betrachtet.**
- **Die Werte der Variablen am Arbeitspunkt werden durch den Index „0“ gekennzeichnet.**
- **Die Abweichungsgrößen werden durch kleine Buchstaben gekennzeichnet:**

  $$y = \Delta Y = Y - Y_0$$

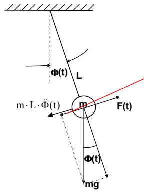
- **Unterscheidung: Linearisierung des statischen und dynamischen Verhaltens.**

Linearisierung nichtlinearer Systeme (2)

Linearisierung: Dynamisches Verhalten

Linearisierung einer nichtlinearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Ruhelage durch Taylor-Reihen-entwicklung und Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung.

Beispiel



$$m\cdot L\cdot \ddot{\Phi}(t) + m\cdot g\cdot \sin(\Phi(t)) = F(t)$$

$$\left.\frac{\partial(m\cdot L\cdot\ddot{\Phi})}{\partial\ddot{\Phi}}\right|_{\Phi_0=0}\cdot\ddot{\varphi} + \left.\frac{\partial(m\cdot g\cdot\sin(\Phi))}{\partial\Phi}\right|_{\Phi_0=0}\cdot\varphi = f$$

$$m\cdot L\cdot\ddot{\varphi} + m\cdot g\cdot\underbrace{\cos(\Phi_0=0)}_{=1}\cdot\varphi = f$$

$$\boxed{m\cdot L\cdot\ddot{\varphi}(t) + m\cdot g\cdot\varphi(t) = f(t)}$$

Linearisierung nichtlinearer Systeme (3)

Linearisierung: Statisches Verhalten

Linearisierung einer statischen Kennlinie:
- **a) graphische Linearisierung**
- **b) analytische Linearisierung**

Steigung der Tangente im Arbeitspunkt.

a)

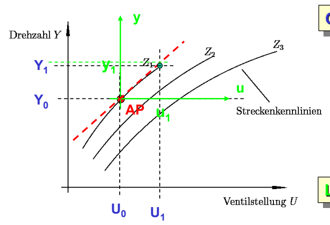


Bild 1.7: Typisches Kennlinienfeld einer Dampfturbine

Originalkoordinaten

$$Y_1 \approx Y_0 + K\cdot(U_1 - U_0)$$

$$\underbrace{Y_1 - Y_0}_{y_1} \approx K\cdot(\underbrace{U_1 - U_0}_{u_1})$$

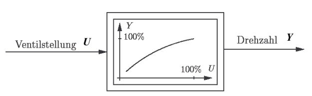
Lineare Koordinaten

$$y_1 = K\cdot u_1$$

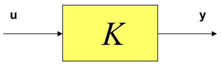
Linearisierung nichtlinearer Systeme (4)

a) Fortsetzung

Der nichtlineare Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang



wird durch die lineare Beziehung



$$K = \left.\frac{\partial Y}{\partial U}\right|_{U_0}$$

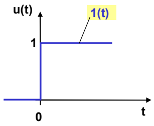
im Arbeitspunkt ersetzt.

ist die Steigung der Tangente im Arbeitspunkt.

Modellierung mit Testsignalen: Sprungfunktion

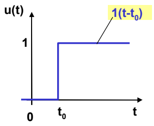
$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Definition: Sprungfunktion 1(t)
(Einheitssprungfunktion)



Graphische Darstellung

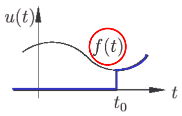
$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ 1 & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}$$



Zeitverschobene Sprungfunktion $1(t-t_0)$

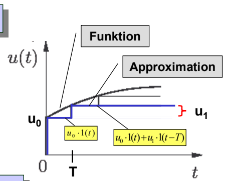
Testsignal Sprungfunktion (2)

$$u(t) = f(t)1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \forall \quad t < t_0 \\ f(t) & \forall \quad t \geq t_0 \end{cases} \Rightarrow$$



Einschalten von Zeitfunktionen durch $1(t-t_0)$

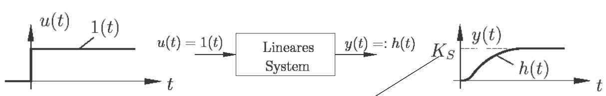
$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_i 1(t - kT) \Rightarrow$$



Approximation beliebiger Funktionen

Sprungantwort

Definition 2.4 Ein dynamisches System sei zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ energiefrei, d.h. alle Anfangsbedingungen der beschreibenden Differentialgleichung sind Null. Die Systemantwort des durch die Einheitssprungfunktion $u(t) = 1(t)$ erregten Systems heißt die **Sprungantwort** oder Übergangsfunktion $h(t)$. □



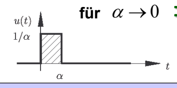
Sprungfunktion 1(t) Sprungantwort h(t)

$$K_S = h(\infty) = \lim_{t \to \infty} h(t)$$

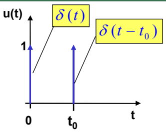
Systemverstärkung

Impulsfunktion und Impulsantwort

$u(t) = \frac{1}{\alpha}[1(t) - 1(t-\alpha)]$ für $\alpha \to 0$ $\Rightarrow$ **Dirac'scher Deltaimpuls δ(t)**

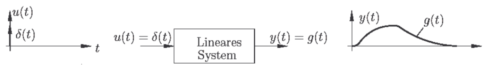


Recheckimpuls mit normierter Impulsfläche 1



Symbolische Darstellung

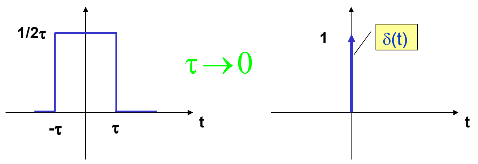
Definition 2.5
Die Systemantwort eines Systems bei Erregung durch $\delta(t)$ heißt: **Impulsantwort** oder Gewichtsfunktion $g(t)$. □



Dirac'scher Deltaimpuls δ(t) **Gewichtsfunktion g(t)**

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Steuer- und Regelungstechnik

Dirac'sche Deltafunktion



Die Deltafunktion ist eine Distribution oder verallgemeinerte Funktion

⇒ **Ein von Null verschiedener Funktionswert ergibt sich nicht durch Einsetzen eines Argumentes, sondern durch eine Rechenvorschrift.** **Ausblendeigenschaft**

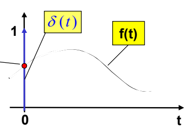
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Steuer- und Regelungstechnik

Ausblendeigenschaft des Deltaimpulses

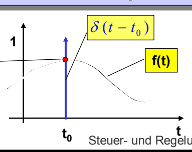
Das Integral über das Produkt einer Funktion f(t) mit dem Deltaimpuls δ(t) blendet alle Funktionswerte bis auf f(0) aus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$



Ausblendeigenschaft des verschobenen Deltaimpulses:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Steuer- und Regelungstechnik

Faltungsintegral

Definition: $y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$

Eigenschaften:

- **Beschreibt die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal im Zeitbereich.**
- **Bestimmung des Ausgangssignals für beliebige Eingangssignale.**

Achtung: t ist eine Konstante

$u(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow \quad y(t) = \int_0^t g(v)u(t-v)\mathrm{d}v$

Gewichtsfunktion enthält die gesamte Information über das dynamische Verhalten eines linearen Systems.

Modellbildung mit Hilfe von Differentialgleichungen

Unterscheidung:

- **Übertragungsmodell** (Klemmenmodell)
- **Zustandsgrößenmodell** (Zustandsmodell)

Die Zustandsgrößen beschreiben den Energiegehalt der im System enthaltenen Speicherelemente.

Beispiel: Feder-Dämpfer-Masse-System
Feder: Speicher für potentielle Energie
Masse: Speicher für kinetische Energie

Zustandsmodell

System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

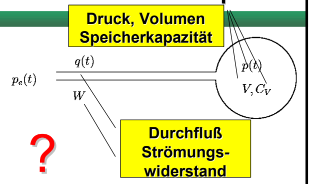
$$\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Beispiel: Pneumatischer Speicher

u → **Technisches Übertragungssystem** → y

u → **Modell des technischen Übertragungssystems** → y

?



Eingangsgröße: $u(t) = p_e(t)$

Ausgangsgröße: $y(t) = p(t)$

$$q(t) = \frac{1}{W}[p_e(t) - p(t)]$$

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{C_V} q(t)$$

Gesetze: Durchfluß = Druckgefälle / Strömungswiderstand

Druckänderung = Durchfluß / Speicherkapazität

$$\Rightarrow \quad C_V W \dot{p}(t) + p(t) = p_e(t)$$

Beispiel: Pneumatischer Speicher (2)

$$\left[\frac{m^3}{Pa}\right]\left[\frac{Pa}{m^3/s}\right] \qquad T = C_V W \; [\mathrm{s}]$$

$$C_V W \dot{p}(t) + p(t) = p_e(t) \quad \Rightarrow \quad T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Proportionalübertragungsglied mit Verzögerung (Zeitkonstante) 1. Ordnung

PT_1-System

Anwendung der Laplace-Transformation

$$TsY(s) + Y(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s)(Ts+1) = U(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{1+sT}\cdot U(s) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+sT}\cdot \underbrace{U(s)}\right\}$$

1/s **für** *u(t) = 1(t)*

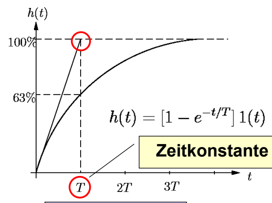
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+sT)}\right\} = (1 - e^{-t/T})\cdot 1(t)$$

Tabelle A.2, Korrespondenz 6

Beispiel: Pneumatischer Speicher (3)

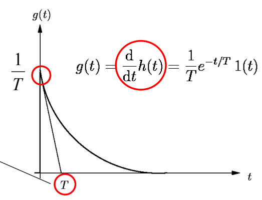
PT_1-System

$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$



Zeitkonstante

Sprungantwort

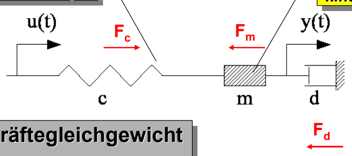


Gewichtsfunktion

Beispiel: Mechanischer Schwinger

Speicher für potentielle Energie

Speicher für kinetische Energie



$$F_c = (u-y)c$$
$$F_m = m\ddot{y}$$
$$F_d = d\dot{y}$$

Kräftegleichgewicht

$F_c = F_m + F_d$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{c}\ddot{y}(t) + \frac{d}{c}\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Beispiel: Mechanischer Schwinger (2)

Normierte Differentialgleichung

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

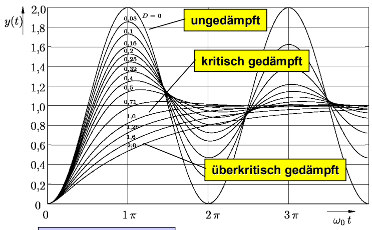
schwingungsfähiges PT_2-System

Dämpfungsgrad

$$D = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{1}{mc}}$$

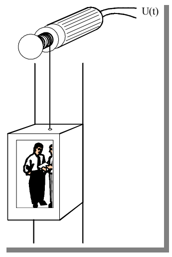
Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung

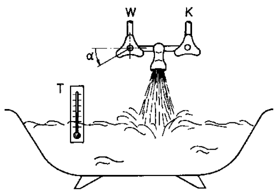
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$



Sprungantwort

Systeme ohne Ausgleich (I-Systeme)

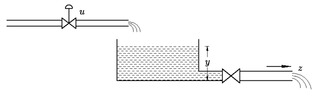




Füllstand einer Badewanne

Zurückgelegter Weg einer Aufzugskabine

Systeme ohne Ausgleich (2)

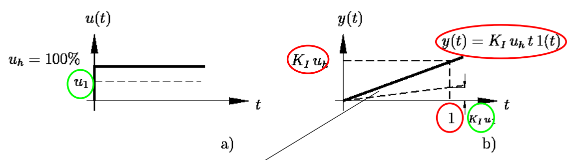


$$y(t) = K_I \int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau + y_0$$

$$K_I =: \text{Integrierbeiwert}$$

Beispiel: Füllstand eines Beckens

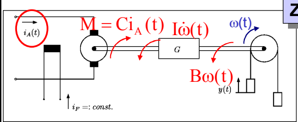
Mathematische Beschreibung



Steigung der Sprungantwort = $K_I u_h$

Sprungantwort

I-Systeme mit Verzögerung



Förderantrieb

Zusammenhang zwischen $i_A(t)$ und $\omega(t)$

$$I\dot{\omega}(t) + B\omega(t) - Ci_A(t) = 0 \quad \cdot \tfrac{1}{B}$$

Zeitkonstante T_m = I/B
Systemverstärkung K_S = C/B

PT_1-System

$$T_m\dot{\omega}(t) + \omega(t) = \frac{C}{B} i_A(t)$$

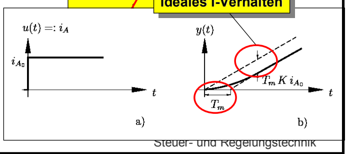
Zusammenhang zwischen i(t) und y(t)

$$T_m\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_I \cdot \tfrac{C}{B} \cdot i_A(t) = K \cdot i_A(t)$$

$$T_m\dot{y}(t) + y(t) = K \cdot \int_0^t i_A(\tau)\,d\tau$$

IT_1-System

Ideales I-Verhalten



Laplace-Transformation

Definition: Laplace-Transformierte

Ist $f(t)$ ein Signal mit der Eigenschaft $f(t) = 0$ für $t < 0$,
so lautet die einseitige **Laplace-Transformierte**:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Integraltransformation

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$$

Korrespondenzzeichen

Laplace-Operator: $s \equiv \sigma + j\omega$

Bezeichnungen:
$f(t)$: Originalfunktion, Zeitbereich
$F(s)$: Bildfunktion, Bildbereich, Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion

Gegeben:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \ldots + b_m u^{(m)}(t) \quad ; m \le n$$

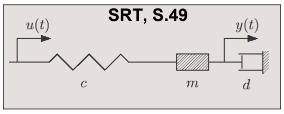
Definition: Übertragungsfunktion

Die **Übertragungsfunktion G(s)** eines Systems bestimmt sich über das Verhältnis der Laplace-Transformierten seiner Ein- und Ausgangssignale:

$$G(s) \equiv \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

Y(s) und U(s) sind die Ein- und Ausgangsgrößen des Systems im Bildbereich.

Übertragungsfunktion: Beispiel



$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Anwendung des Differentiationssatzes auf

$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 u(t)$$

für $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$ **liefert:**

$$s^2 Y(s) + 2D\omega_0 s Y(s) + \omega_0^2 Y(s) = \omega_0^2 U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}}$$

Übertragungsfunktion (3)

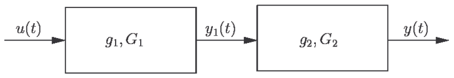
Zusammenhang Gewichts- und Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion G(s) lässt sich über die Gewichtsfunktion g(t) durch die Laplace-Transformation bestimmen:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t)\, e^{-s \cdot t}\, dt$$

Anwendung des Faltungssatzes

Reihenschaltung zweier Systeme



Lösung im Zeitbereich (Faltungsintegral)

$$y(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty g_1(v) \cdot g_2(\tau) \cdot u(t - \tau - v) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}v$$

Lösung im Bildbereich (Faltungssatz)

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = G_2(s)Y_1(s) \quad = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Faltungssatz stellt die Grundlage der Block-schaltbildalgebra dar (Tabelle 2.4).

Übertragungsfunktion (4)

Pole und Nullstellen

Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1}s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

lassen sich in Linearfaktoren (Fundamentalsatz der Algebra, Bronstein S. 576, SRT S.111) **zerlegen:**

Lösungen der Gleichung $Z(s) = 0$

$$\mathbf{Z(s)} = b_0 + b_1 \cdot s^1 + \cdots + b_m \cdot s^m = b_m \prod_{j=1}^{m} (s - n_j)$$

Lösungen der Gleichung $N(s) = 0$

$$\mathbf{N(s)} = a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n = a_n \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)$$

n_i : Nullstellen und
p_i : Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$

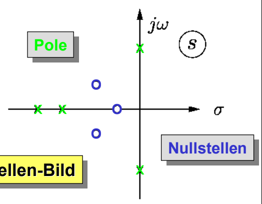
Übertragungsfunktion (5)

Darstellungsformen

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s^1 + \cdots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n} \quad \text{(Polynomform)}$$

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - n_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} \quad \text{(Pol-Nullstellen-Form)}$$

Das Pol-Nullstellen-Bild beschreibt eine Übertragungsfunktion bis auf den Faktor b_m/a_n vollständig !!



Pol- Nullstellen-Bild

Übertragungsfunktion: Realisierbarkeit

Für Grad Z(s) > Grad N(s) gilt

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z_1(s)}{N(s)} + k_0 + k_1 s + \ldots + k_{m-n} s^{m-n}$$

mit Grad $Z_1(s) = n - 1$

Es treten ideal differenzierende Glieder auf !

$u(t) = \sin \omega t$ ⟹ $y(t) = \frac{du(t)}{dt} = \omega \cos \omega t$

Ideales D-Glied ist technisch nicht realisierbar !!!

Eigenschaften der Pole

- **Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion sind wichtige Kenngrößen eines dynamischen Systems.**
- **Die Eigenbewegung (Eigendynamik) eines dynamischen Systems setzt sich aus Exponential-funktionen $e^{\lambda_i t}$ zusammen, deren Exponenten gerade den Polen entsprechen ($\lambda_i = p_i$).**
- **Haben sämtliche Pole negativen Realteil, so klingt die Eigenbewegung ab, das System ist stabil.**
- **Die Differenz n-m der Ordnungen des Zähler- und Nennerpolynoms der Üfkt. wird Differenzgrad genannt, und ist eine weitere wichtige Kenngröße.**

Partialbruchzerlegung

Beispiel:

$$G(s) = \frac{(s+N)}{(s+2)(s+3)} = \frac{R_1}{(s+2)} + \frac{R_2}{(s+3)}$$

$$= \frac{(R_1+R_2)s + 3R_1 + 2R_2}{(s+2)(s+3)}$$

Koeffizientenvergleich $R_1 + R_2 = 1$ ⟹ $R_1 = 1 - R_2$

$3R_1 + 2R_2 = N$ **einsetzen von R_1 liefert:** $3 - 3R_2 + 2R_2 = N$

⟹ $-R_2 = N - 3$

⟹ $R_2 = 3 - N$, $R_1 = N - 2$ ⟹ $G(s) = \frac{N-2}{(s+2)} + \frac{3-N}{(s+3)}$

Korresp. 3 in Tabelle A.2: $g(t) = (N-2)e^{-2 \cdot t} + (3-N)e^{-3 \cdot t}$

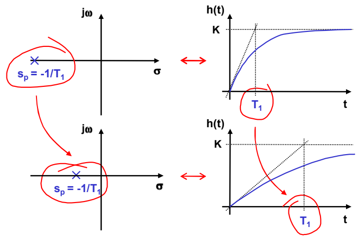
PT1-System: Pole und Zeitverhalten

PT_1-System: $G(s) = \frac{K}{1 + sT_1}$

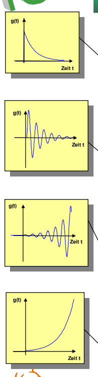
Nullstellen: Keine

Polstelle: $s_p = -\frac{1}{T_1}$

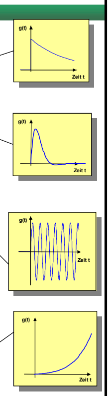
Ein System reagiert um so schneller, je weiter entfernt sich ein Pol von der Imaginärachse befindet.



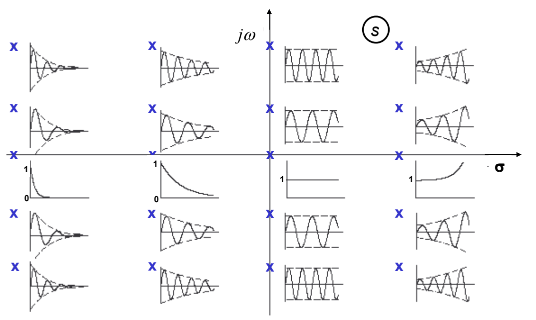
PT2-System: Pole und Zeitverhalten



Dämpfung	Systemeigenschaft	Pole
$D > 1$	überkritisch gedämpft	negative Pole
$D = 1$	kritisch gedämpft	negativer reeller Doppelpol
$\frac{1}{\sqrt{2}} < D < 1$	gedämpft ohne Resonanzüberhöhung	konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen
$0 < D < \frac{1}{\sqrt{2}}$	gedämpft mit Resonanzüberhöhung	konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen
$D = 0$	ungedämpft	konjugiert komplexe Pole mit verschwindenden Realteilen
$-1 < D < 0$	instabil	konjugiert komplexe Pole mit positiven Realteilen
$D = -1$	instabil	positiv reeller Doppelpol
$D < -1$	instabil	positive reelle Pole



Pole und Eigenbewegungen



ISR

Eigendynamik eines Systems

Die Eigendynamik beschreibt die Eigenbewegung eines dynamischen Systems, die das System ohne Erregung von außen auf Grund einer Anfangs-auslenkung ausführt.

"Kurzer Hammerschlag" → **System Übertragungsfunktion G(s)** → $Y(s) = G(s)$

$$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\}} \quad \boxed{= G(s) \cdot 1 = G(s)}$$

Korrespondenztabelle Nr. 34

Die Übertragungsfunktion G(s) beschreibt die Eigendynamik eines dynamischen Systems !

ISR

Eigenschaften der Nullstellen

- **Eine Nullstelle n_i der Übertragungsfunktion blockiert die Übertragung eines Signals $u(t) = e^{n_i t}$ mit der komplexen Frequenz n_i.**
- **Die Nullstellen bestimmen mit, mit welchem Gewicht, die zu einem Pol λ gehörende Exponentialfunktion $e^{\lambda t}$ in die Eigendynamik eingeht.**
- **Die Nullstellen der Übertragungsfunktion haben keinen Einfluß auf die Stabilität des dynamischen Systems.**
- **Die Nullstellen beeinflussen aber sehr wohl die Stabilität des rückgekoppelten Systems.**

ISR

Eigenschaften der Nullstellen (2)

Blockierung der Signalübertragung

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Die Übertragungsfunktion hat 2 Pole bei s = p_1 = -2 und s = p_2 = -3 und eine Nullstelle bei s = N_1 = -1.

Das Eingangssignal $u(t) = e^{N_1 t} = e^{-t}$ wird durch $G(s)$ nicht übertragen:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Tabelle A.2, Korrespondenz 3

$$= \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \cdot \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{\cancel{s+1}}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{\cancel{s+1}} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Systeme mit Totzeit

Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t - T_t)$$

Totzeit

Der Rechtsverschiebungssatz (Tabelle A.1) der Laplace-Transformation liefert eine transzendente Übertragungsfkt.:

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} e^{-T_t s}$$

Beschreibung im Bildbereich: Zusammenfassung

- **Beschreibung des Übertragungsverhaltens durch gebrochen rationale Funktionen (Übertragungsfunktionen):**

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1}s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n}$$

- **Für Systeme mit Totzeit, tritt noch eine transzendente Funktion auf:**

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \cdot e^{-sT_t}$$

- **Das Nennerpolynom $N(s)$ der Übertragungsfunktion wird charakteristisches Polynom genannt, da die Lösungen (Pole) der charakteristischen Gleichung $N(s) = 0$ die Eigenbewegungen des Systems bestimmen.**

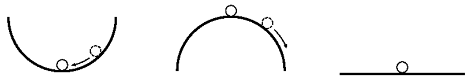
Beschreibung im Bildbereich: Zusammenfassung

- **Damit die Eigenbewegungen eines Systems abklingen, müssen alle Pole von $G(s)$ negative Realteile haben.**
- **Je größer die Beträge der Realteile der Pole von $G(s)$ sind, um so kleiner sind die zugehörigen, die Verzögerung bestimmenden Zeitkonstanten.**
- **Dicht am Ursprung der s-Ebene liegende Pole (große Zeitkonstanten) haben einen dominierenden Einfluß auf das Übertragungsverhalten.**
- **Die Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion hat einen wesentlichen Einfluß auf das Übergangsverhalten eines Systems.**

Stabilität dynamischer Systeme

Definition 3.1 (*Stabilität*)

i) Eine **Ruhelage** eines dynamischen Systems heißt (*asymptotisch*) **stabil**, wenn das System nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig in die Ruhelage zurückkehrt (Bild 3.2).



a) b) c)

Bild 3.2: Stabilität von Ruhelagen
a) stabile Ruhelage b) instabile Ruhelage c) indifferente Ruhelage

Stabilität dynamischer Systeme (2)

Definition 3.2 (*Stabilität eines linearen Systems*)

Eine lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem heißt **asymptotisch stabil**, wenn seine Gewichtsfunktion auf Null abklingt, d.h. wenn

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \qquad (3.25)$$

gilt.

Asymptotische Stabilität

Ein lineares Übertragungssystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln p_i seiner charakteristischen Gleichung

$$\text{Re}\, p_i < 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

erfüllt ist.

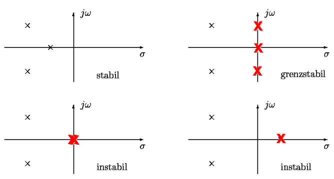
Stabilität dynamischer Systeme (4)

Instabilität

Ein lineares System ist genau dann instabil, wenn mindestens ein Pol seiner Übertragungsfunktion in der rechten s–Halbebene liegt, oder wenn mindestens ein mehrfacher Pol auf der Imaginärachse der s–Ebene vorhanden ist.

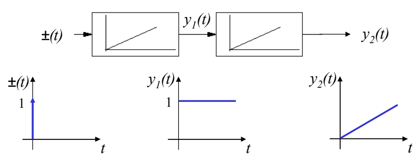
Grenzstabilität

Ein lineares System ist genau dann grenzstabil, wenn kein Pol der Übertragungsfunktion in der rechten s–Halbebene liegt, keine mehrfachen Pole auf der Imaginärachse auftreten und auf dieser mindestens ein *einfacher* Pol vorhanden ist.



Beispiel für Instabilität

Doppelpol im Ursprung



Algebraische Stabilitätskriterien

Motivation:

- Die Nullstellenbestimmung ist für Polynome

  $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0$

  vom Grad n ≥ 4 im allgemeinen nur numerisch möglich.
- Für die Stabilitätsanalyse braucht man die genaue Lage der Nullstellen nicht zu kennen, sondern man fragt nur danach, ob alle Nullstellen von $P(s)$ in der linken s-Halbebene liegen (ein solches Polynom $P(s)$ nennt man stabil bzw. ein Hurwitz-Polynom).

Hurwitz-Kriterium (1895)

Notwendige Bedingung:
Alle Koeffizienten des Polynoms $P(s)$ müssen vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so ist $P(s)$ **kein Hurwitz-Poynom**.

Hurwitz-Kriterium

Hurwitz-Kriterium

Hinreichende Bedingung:

Die Hurwitzdeterminante H_{n-1} und alle ihre Hauptdeterminanten $H_i (i = 1, 2, \ldots, n-2)$ sind positiv (1. und 2. notwendig und hinreichend).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} H_1 & H_2 & H_3 & & & & \end{array} \\ H_{n-1} = & \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \end{array} \quad (3.30)$$

mit $a_{n-i} = 0$ für $n - i < 0$; $i = 0, 1, 2, \ldots$.

$$H_1 = a_{n-1} > 0 \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

Hurwitz-Kriterium (2)

Beispiel:

Gegeben sei das Polynom $P(s) = 6s^3 + 4s^2 + 2s + 1$ ➡

$a_n = a_3 = 6$

$a_{n-1} = a_2 = 4$

$a_{n-2} = a_1 = 2$

$a_{n-3} = a_0 = 1$

Notwendige Bedingung ist erfüllt, da alle a_i vorhanden und positiv sind.

Berechnung der Hauptdeterminanten:

$H_1 = a_{n-1} = 4 > 0$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ **Das Polynom $P(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom !**

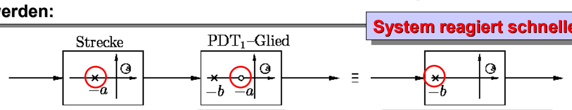
Berechnung von H_n ist nicht notwendig:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot H_2 = 2 > 0$$

Pol-Nullstellen-Kompensation

Die Übertragungseigenschaften eines dynamischen Systems können durch eine Pol-Nullstellen-Kompensation (Steuerung) verändert werden:

System reagiert schneller

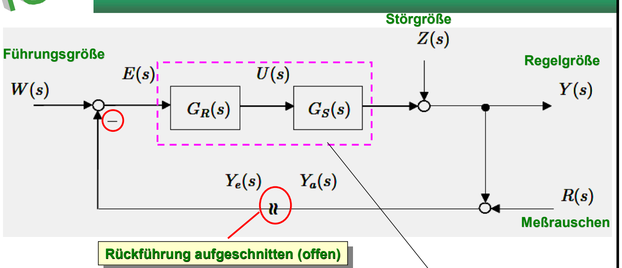


$G_S(s) = \frac{1}{s+a}$ $\quad G_K(s) = \frac{s+a}{s+b}$ $\quad G(s) = G_S(s) \cdot G_K(s) = \frac{1}{s+b}$

Voraussetzungen:

- **Die Strecke (Lage der zu kompensierenden Pole) muß bekannt sein.**
- **Eine Polkompensation ist nur in der linken s-Halbebene, also für stabile Pole möglich.**

Standardregelkreis

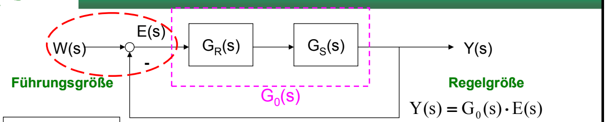


Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des **offenen** Regelkreises für $z=w=r=0$:

$$G_0(s) =: G_R(s) G_S(s)$$

$$\Rightarrow Y_a(s) = -G_R(s) G_S(s) Y_e(s) = -G_0(s) Y_e(s)$$

Führungsübertragungsfunktion



$$Y(s) = G_0(s)\cdot E(s)$$
$$= G_0(s)[W(s) - Y(s)]$$

Definition:

Die **Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$** gibt die Wirkung der Führungsgröße **W(s)** auf die Regelgröße **Y(s)** an. Für den Standard-Regelkreis berechnet sie sich durch:

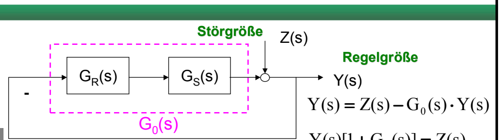
$$Y(s)[1+G_0(s)] = G_0(s)W(s) \quad \Rightarrow \quad G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$$

Führungsverhalten: $Y(s) = G_W(s)\cdot W(s)$

Regelungsaufgabe: $Y(s) := W(s) \quad \Rightarrow \quad G_w(s) = 1$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Steuer- und Regelungstechnik

Störübertragungsfunktion



$$Y(s) = Z(s) - G_0(s)\cdot Y(s)$$
$$Y(s)[1+G_0(s)] = Z(s)$$

Definition:

Mit der **Störübertragungsfunktion $G_z(s)$** lassen sich die Wirkungen der externen Störungen **Z(s)** auf die Regelgröße **Y(s)** berechnen. Für den Standard-Regelkreis lautet sie:

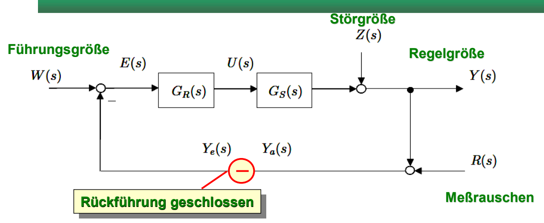
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1+G_0(s)}$$

Störverhalten: $Y(s) = G_z(s)\cdot Z(s)$

Regelungsaufgabe: $Y(s) := 0 \quad \Rightarrow \quad G_z(s) = 0$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Steuer- und Regelungstechnik

Standardregelkreis(2)



$$Y(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}Z(s) + \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}W(s) - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}R(s)$$

$$\to 0 \qquad \underbrace{\to 1 \qquad \to 0}_{\text{Zielkonflikt}}$$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Steuer- und Regelungstechnik

PT2-System (komplexe Pole)

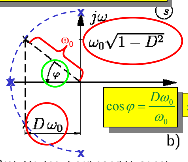
Differentialgleichung: $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = K\,u(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0}s + 1}$

Pole: Aus $s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ folgt $s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{(D\omega_0)^2 - \omega_0^2}$

$$= -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$

$|s_{1,2}| = \sqrt{(D\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-D^2)} = \omega_0$



$\cos\varphi = \frac{D\omega_0}{\omega_0} = D$

Für $D < 1$ ergibt sich:

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}$$

Für $D = 1$ ergibt sich: $s_1 = s_2 = -\omega_0$

und für $D = 0$: $s_{1,2} = \pm j\omega_0$

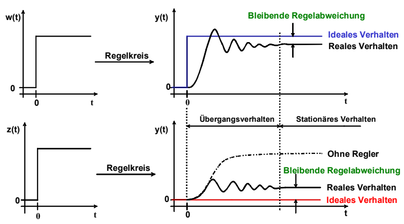
Stationäres Verhalten des Regelkreises

Definition:

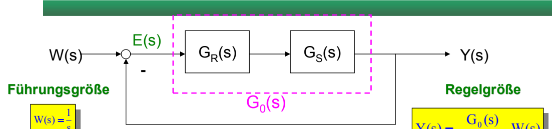
Die **bleibende Regelabweichung e_∞** stellt die Abweichung zwischen Führungs- und Regelgröße bzw. Stör- und Regelgröße im stationären Verhalten nach einem angelegten Eingangssignal dar.

Führungsverhalten

Störverhalten



Bleibende Regelabweichung: Führungsverhalten



$W(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}W(s)$

Bleibende Regelabweichung

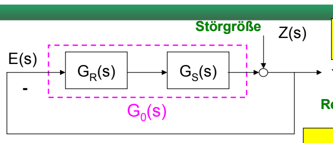
$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}\big(w(t) - y(t)\big)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\big(W(s) - Y(s)\big)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\left(W(s) - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}W(s)\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \underbrace{sW(s)}_{1}\left(1 - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{1+G_0(s)-G_0(s)}{1+G_0(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G_0(s)}$$

Bleibende Regelabweichung: Störverhalten



$Z(s) = \frac{1}{s}$

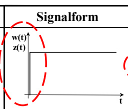
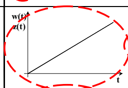
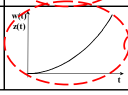
$Y(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} Z(s)$

Bleibende Regelabweichung

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = -\lim_{t\to\infty} y(t)$$
$$= -\lim_{s\to 0} sY(s)$$
$$= -\lim_{s\to 0} \cancel{s}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\cancel{Z(s)}\right)$$
$$= -\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)$$

Der Betrag der bleibenden Regelabweichung ist in beiden Fällen gleich groß und von $G_0(s)$ für $s \to 0$ (Verstärkung des offenen Kreises) abhängig.

Stationäre Regelgüte: Fehlerarten

Ordnung	Zeitsignal	Bildfunktion	Signalform	Fehlerart - Regelgüte
1	$\sim t^0\, 1(t)$	$\sim \frac{1}{s}$		Regelfehler 1.Ordnung **Lagefehler**
2	$\sim t^1\, 1(t)$	$\sim \frac{1}{s^2}$		Regelfehler 2. Ordnung **Geschwindigkeitsfehler**
3	$\sim t^2\, 1(t)$	$\sim \frac{1}{s^3}$		Regelfehler 3. Ordnung **Beschleunigungsfehler**

Stationäre Regelgüte

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s^\ell}\,\frac{b_0 + b_1\cdot s + b_2\cdot s^2 + \cdots + b_m\cdot s^m}{a_0 + a_1\cdot s + a_2\cdot s^2 + \cdots + a_{n-\ell}\cdot s^{n-\ell}}$$

Systemtyp $G_0(s)$	Sprung $1(t)$	Rampe $t1(t)$	Parabel $t^2 1(t)$
P-Verhalten $(l=0)$	$\frac{1}{1+K_0}$	∞	∞
I-Verhalten $(l=1)$	0	$\frac{1}{K_0}$	∞
I_2-Verhalten $(l=2)$	0	0	$\frac{1}{K_0}$

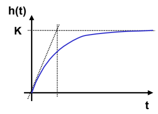
P-Regler an einer Strecke mit Ausgleich bewirkt eine bleibende Regelabweichung !!

I-Regler an einer Strecke mit Ausgleich regelt **sprungförmige** Anregungen vollständig aus !!!!

Die stationäre Regelgüte ist sowohl von der Art der Anregung als auch vom Verhalten des offenen Systems abhängig.

Systemverstärkung

Systeme mit Ausgleich



Der stationäre Endwert der Übergangsfunktion *h(t)* gibt das *statische* *Verstärkungsverhältnis eines Systems wieder und wird als Systemverstärkung K bezeichnet.*

$$\boxed{K = h(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t)}$$
$$= \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} sG(s)\,{}^{1}\!/_{s}\ \boxed{= G(0)}$$

Systeme ohne Ausgleich

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s^{\ell}}\,\frac{1+\beta_1\cdot s+\beta_2\cdot s^2+\cdots+\beta_m\cdot s^m}{1+\alpha_1\cdot s+\alpha_2\cdot s^2+\cdots+\alpha_{n-\ell}\cdot s^{n-\ell}}$$

Wenn der proportionale Übertragungsanteil

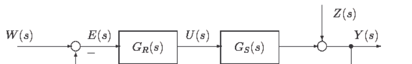
$$K_0\cdot\frac{1+\beta_1\cdot s+\beta_2\cdot s^2+\cdots+\beta_m\cdot s^m}{1+\alpha_1\cdot s+\alpha_2\cdot s^2+\cdots+\alpha_{n-\ell}\cdot s^{n-\ell}}$$

nur Pole in der linken *s*-Halbebene hat, dann ist K_0 der Endwert der Übergangsfunktion dieses Terms.

Diese Verstärkung K_0 des proportionalen Übertragungsanteil bestimmt das stationäre Verhalten des Regelkreise (vgl. Skript SRT, Tabelle 3.1) und wird auch bei Systemen ohne Ausgleich als Systemverstärkung (Verstärkung des offenen Systems) bezeichnet.

Regelkreisentwurf (2)

Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis



$$G_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1+G_0(s)} = 0$$

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = 1$$

1) **Als Mindestanforderung muß der Regelkreis stabil sein.**
2) **Die Störgröße z(t) soll einen möglichst geringen Einfluß auf die Regelgröße y(t) haben.**
3) **Die Regelgröße y(t) soll einer zeitlich sich verändernden Führungsgröße w(t) möglichst genau und schnell folgen.**
4) **Der Regelkreis soll möglichst unempfindlich gegenüber nicht zu großen Parameteränderungen sein.**

$$¢\ G_W = \frac{¢\ G_0}{(1+G_0)(1+G_0^{¤})} = 0$$

Aktuelle Größe

Nominalgröße

Regelkreisentwurf (3)

Die Anforderungen 2 – 4 könnten mit

$$|G_0(s)| = |G_S(s)\cdot G_R(s)| \to \infty \;\Rightarrow$$

sehr große Reglerverstärkung notwendig

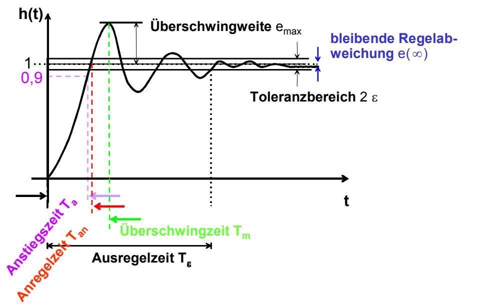
erfüllt werden.

Beliebig große Rückführverstärkungen sind in der Praxis aus diesen Gründen nicht zu realisieren:

- **Dynamisches Verhalten des Stellgliedes (Stellgrößenbeschränkung),**
- **Zu große Belastung der Regelstrecke,**
- **Verstärkung des Schwingungsverhaltens oder sogar Verlust der Stabilität.**

Regelkreisentwurf (4)

Gütemaße im Zeitbereich: Führungsverhalten



Regelkreisentwurf (5)

Gütemaße im Zeitbereich: Störverhalten

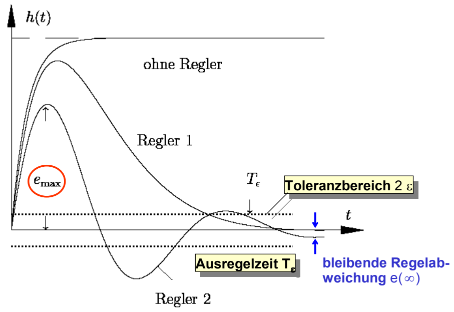
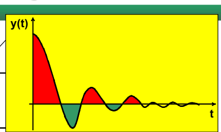


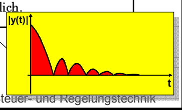
Bild 5.3: Störsprungantworten eines Systems für verschiedene Regler

Regelkreisentwurf (7)

Integralkriterien



Gütemaß	Eigenschaft
$I_1 = \int_0^\infty e(t)dt$	*Lineare Regelfläche:* Eignet sich zur Beurteilung stark gedämpfter oder monotoner Regelverläufe; einfache mathematische Behandlung.
$I_2 = \int_0^\infty \lvert e(t)\rvert dt$	*Betragslineare Regelfläche:* Geeignet für nichtmonotonen Schwingungsverlauf. Umständliche Auswertung.
$I_3 = \int_0^\infty e^2(t)dt$	*Quadratische Regelfläche:* Starke Berücksichtigung großer Regelabweichungen; liefert größere Ausregelzeiten als I_2. In vielen Fällen analytische Berechnung möglich.



Regelkreisentwurf (8)

Integralkriterien (2)

$I_4 = \int_0^\infty t\lvert e(t)\rvert dt$	*Zeitbeschwerte betragslineare Regelfläche (Integral of time-multiplied absolute value of error, ITAE–Kriterium):* Wirkung wie I_2; berücksichtigt aber zusätzlich die Dauer der Regelabweichung.
$I_5 = \int_0^\infty t e^2(t) dt$	*Zeitbeschwerte quadratische Regelfläche:* Wirkung wie I_3; berücksichtigt zusätzlich die Dauer der Regelabweichung.
$I_6 = \int_0^\infty [e^2(t) + \alpha \dot{e}^2(t)] dt$	*Verallgemeinerte quadratische Regelfläche:* Wirkung günstiger als bei I_3, allerdings Wahl des Bewertungsfaktors α subjektiv.
$I_7 = \int_0^\infty [e^2(t) + \beta u^2(t)] dt$	*Quadratische Regelfläche und Stellaufwand:* Etwas größerer Wert von e_{max}, jedoch t_ε wesentlich kürzer; Wahl des Bewertungsfaktors β subjektiv.

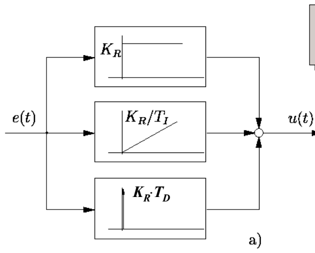
Einstellung eines PID-Reglers

Ein PID-Regler besteht aus einer Parallelschaltung eines P-, I- und D-Gliedes:

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right)$$

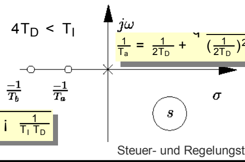
Nachstellzeit

Vorhaltezeit



$4T_D < T_I$

$$\frac{1}{T_a} = \frac{1}{2T_D} + \sqrt{\left(\frac{1}{2T_D}\right)^2 - \frac{1}{T_I T_D}}$$

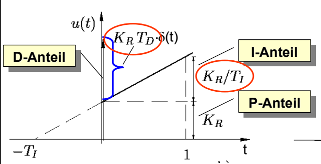


$$\frac{1}{T_b} = \frac{1}{2T_D} - \sqrt{\left(\frac{1}{2T_D}\right)^2 - \frac{1}{T_I T_D}}$$

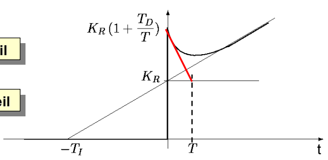
Einstellung eines PID-Reglers (2)

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right)$$

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + Ts}\right)$$



Sprungantwort des idealen PID-Reglers



Sprungantwort des realisierbaren PID-Reglers

Die Nachstellzeit T_I ist die Zeit, die vergehen muß, damit die Sprungantwort des I-Anteils den Wert erreichen kann, den der P-Anteil beim Sprung sofort erreicht.

$u_I(t) = \frac{K_R}{T_I} \cdot t$

$u_P(t) = K_R \cdot t$

Die Vorhaltezeit T_D ist die Zeit, die vergehen muß, damit die Rampenantwort des P-Anteils den Wert erreichen kann, den der D-Anteil bei einer Rampe sofort erreicht.

$u_D(t) = K_R \cdot T_D$

Einstellung eines PID-Reglers (3)

Wirkungsweise des PID-Reglers

P-Anteil:

- Je größer die Regelabweichung *e(t)*, desto größer ist der P-Anteil in der Stellgröße *u(t)*.
- P-Anteil reagiert auf den momentanen Wert der Regelabweichung.
- Berücksichtigt nur die **Gegenwart**.

I-Anteil:

- Integriert die Regelabweichung.
- Der I-Anteil in der Stellgröße wird so lange größer, bis die Regelabweichung zu Null geworden ist.
- Daher kann er bei stabilen Systemen stationäre Genauigkeit erzwingen.
- Da alle zurückliegende Werte der Regelabweichungen in das Integral eingehen, berücksichtigt der I-Anteil die **Vergangenheit**.

Einstellung eines PID-Reglers (4)

Wirkungsweise des PID-Reglers

D-Anteil:

- Je größer die Änderungsgeschwindigkeit der Regelab-weichung, desto größer ist der D-Anteil in der Stellgröße.
- Dadurch verhindert der D-Anteil, daß sich große Regelabweichungen aufbauen können.
- Seine Wirkung ist in die **Zukunft** gerichtet.

Einstellung eines PID-Reglers (5)

Einstellregeln nach Ziegler-Nichols

Die von Ziegler und Nichols* empirisch gefundenen Einstellungs-regeln liefern für viele Regelstrecken erste brauchbare Einstellungen für einen PID-Regler.

Es werden zwei Verfahren unterschieden:

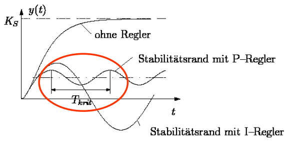
I. Methode des Stabilitätsrandes
II. Methode der Übergangsfunktion

***Ziegler, J. G.; Nichols, N. B.:** Optimum settings for automatic controllers, Trans. ASME, 64 (1942), pp. 759-768;

Einstellung eines PID-Reglers (6)

Methode des Stabilitätsrandes

1. Der Regelkreis wird mit Hilfe eines **P–Reglers** geschlossen.
2. Die Reglerverstärkung wird solange erhöht, bis der geschlossene Kreis **Dauerschwingungen** ausführt. Die dabei eingestellte Reglerverstärkung wird als K_{Rkrit} bezeichnet.



3. Anhand der Verstärkung K_{Rkrit} und der Periodendauer T_{krit} der Dauerschwingung werden die Reglerparameter mit Hilfe der Tabelle 4.2 festgelegt.

Einstellung eines PID-Reglers (7)

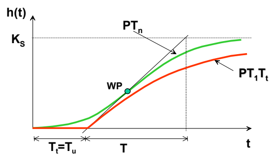
		Reglereinstellwerte		
	Reglertypen	K_R	T_I	T_D
Methode I	P	0,5 K_{Rkrit}	-	-
	PI	0,45 K_{Rkrit}	0,85 T_{krit}	-
	PID	0,6 K_{Rkrit}	0,5 T_{krit}	0,12 T_{krit}
Methode II	P	$\frac{1}{K_S}\ \frac{T}{T_u}$	-	-
	PI	$\frac{0,9}{K_S}\ \frac{T}{T_u}$	3,33 T_u	-
	PID	$\frac{1,2}{K_S}\ \frac{T}{T_u}$	2 T_u	0,5 T_u

Tabelle 4.2: Reglereinstellwerte nach Ziegler und Nichols

Einstellung eines PID-Reglers (8)

Methode der Übergangsfunktion

1. Durch Experimente mit der Regelstrecke wird die Übergangsfunktion bestimmt.
2. Die Übergangsfunktion wird durch die Reihenschaltung eines **PT_1–Gliedes** und eines **Totzeitgliedes** approximiert, indem die statische Verstärkung K_S, die Verzugszeit T_u und die Zeitkonstante T bestimmt werden.



3. Die Reglerparameter werden mit Hilfe der Tabelle 4.2 festgelegt.