Regelungstechnik

8. Übung

Victor Cheidde Chaim

14. März 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h.,prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$
$$\Phi(0) = I$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).

(ii) $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).

(iv) Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).

Aufgabe 7.3

(ii) $A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

EW von A: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -3/2 - \lambda & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \det(A - \lambda I) = \left(-\tfrac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\tfrac{3}{2} - \lambda\right) + \tfrac{1}{4}$$

$$= \lambda^2 + \lambda\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -1}$$

Aufgabe 7.3

(ii) $A = (A - \lambda_{id}) + \lambda_{id}$

$A^k = 0, \quad k \geq c$

$c \in \mathbb{N}$

$$A = \begin{pmatrix} -3/2 - 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(At) = \exp(((A - \lambda_{id}) + \lambda_{id})t = \underline{\exp((A - \lambda_{id})t)\exp(\lambda_{id}t)}$$

Aufgabe 7.3

(ii) $\exp((A-\lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda id)^n t^n}{n!}$

$(A-\lambda id) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow Ew(A-\lambda id) = \det((A-\lambda id) - p\, id)$

$\det\begin{pmatrix} -1/2-p & 1/2 \\ -1/2 & 1/2-p \end{pmatrix} = p^2 - 1/4 + 1/4 = p^2 = 0, \Rightarrow \boxed{p_{1/2} = 0}$

nilpotent

$(A-\lambda id)^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(A-\lambda id)^k = 0$

$k \geq 2$ //

Aufgabe 7.3

(ii) $\exp((A-\lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda id)^n \cdot t^n}{n!} = id + (A-\lambda id)t +$

$+ \frac{(A-\lambda id)^2 t^2}{2!} + \dots \overset{\text{nilpotent } k \geq 2}{=} id + (A-\lambda id)t$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{pmatrix}$ //

$\exp(\lambda id t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda id t)^n}{n!} = \begin{pmatrix} \underbrace{\sum \frac{\lambda t^n}{n!}}_{= e^{\lambda t}} & 0 \\ 0 & \sum \frac{\lambda t^n}{n!} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot id = e^{-t} id$ //

Diagonalmatrix: $D^n = \begin{pmatrix} D_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{22}^n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & D_{nn}^n \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3

$$\phi(t) \overset{\text{ii}}{\cancel{(\text{iii})}} = \exp(At) = \exp((A - \lambda_i \mathrm{id})t)\exp(\lambda_i \mathrm{id}\, t) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix} \mathrm{id}\, e^{-t} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix}$$

Probe: $\phi(0) = e^{0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{id}$ ✓

$$\dot{\phi}(t) = (-1)e^{-t}\begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ -t/2-1/2 & -1/2-t/2 \end{bmatrix} \;//$$

Aufgabe 7.3

~~(iii)~~ ii

$$A \cdot \Phi(t) = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ t/2-1/2 & -1/2-t/2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\Phi}(t) = (-1)\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-t} \begin{bmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ t/2-1/2 & -1/2-t/2 \end{bmatrix} \quad //$$

$$\dot{\Phi}(t) = A \cdot \Phi(t) \quad \checkmark$$

Aufgabe 7.3

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Ew(A) \rightarrow \quad \det(A - \lambda id) = 0$

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 1}$

$A = (A - \lambda id) + \lambda id = (A - id) + id$

$\Phi(t) = \exp(At) = \exp((A-id)t + idt) = \exp((A-id)t)\exp(idt)$

Aufgabe 7.3

(iii) $\exp((A - id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-id)^n t^n}{n!}$

Eigenwerte von

$$\det((A - id) - p \cdot id) = \det\begin{pmatrix} 1-1-p & 2 & 0 \\ 0 & 1-1-p & 2 \\ 0 & 0 & 1-1-p \end{pmatrix} = -p^3 = 0$$

$p_{1,2,3} = 0$

$(A-id)^k = 0$, für $k \geq 3$

$(A-id)$ nilpotent

$$(A - id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - id)^3 = (A-id)^2(A \cdot id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-id)^k = 0$, für $k \geq 3$

Aufgabe 7.3

(iii) $\exp((A-id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-id)^n t^n}{n!} = id + (A-id)t +$

$$+ \frac{(A-id)^2 t^2}{2!} + \cancel{\frac{(A-id)^3 t^3}{3!} + \dots} \quad 0$$

$A^k = 0$

$k \geq 3$

$$\exp((A-id)t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp((A-id)t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 7.3

(iii) $\exp(\mathrm{id}\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{id}^n \cdot t^n}{n!} = \mathrm{id} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \mathrm{id}\, e^t$

$$\Phi(t) = \exp((A \cdot \mathrm{id})t) \cdot \exp(\mathrm{id}\,t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad //$$

Probe: $\phi(0) = \exp(A \cdot 0) = e^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$ ✓

$$\dot{\phi}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4t \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

(iii)

$$\dot{\phi}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) \quad \checkmark$$

Aufgabe 7.3

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \underbrace{1}_{A_{11}} & \underbrace{2 \quad 1}_{A_{12}} \\ 0 & \underbrace{2 \quad 2 \\ 0 \quad 2}_{A_{22}} \end{pmatrix}$

$$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) \Rightarrow \dot{\phi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}$$

1. ϕ_{11} skalar $\Rightarrow \phi_{11} = \exp(A_{11}) = e^{1t} = e^{t}$ //

2. ϕ_{22}: EW $A_{22} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = 2}$ //

$(A_{22} - \lambda id) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotent für $k \geq 2$ $\Rightarrow \exp(A_{22} t) = e^{2t}(id + t(A_{22} - id))$

$$\phi_{22} = \exp(A_{22} t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 7.3

(iv) $\dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11}(t) & \dot{\phi}_{12}(t) \\ 0 & \dot{\phi}_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\dot{\phi}_{12} = A_{11}\phi_{12} + A_{12}\phi_{22} = \phi_{12} + [\underline{2e^{2t}}, e^{2t} + 4e^{2t}t]$$

$$\dot{\phi}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_1 + 2e^{2t}$$

$$\phi_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} \cdot 2e^{2\tau} d\tau = 2e^t \int_0^t e^{\tau} \cdot d\tau$$

$$= 2e^t e^{\tau}\Big|_0^t = 2e^t(e^t - 1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + e^{2t} + 4e^{2t} \cdot t$$

$$x_2(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} \cdot (e^{2\tau} + 4e^{2\tau} \cdot \tau) d\tau = e^t \int_0^t e^{\tau} + 4e^{\tau} \cdot \tau d\tau$$

Aufgabe 7.3

(iv) $x_2(t) = e^t \int_0^t e^\tau + 4e^\tau \cdot \tau \, d\tau = e^t \left[e^\tau + 4(\tau - 1) e^\tau \right]_0^t$

$= 3e^t - 3e^{2t} + 4e^{2t} \cdot t$ //

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -2e^t + 2e^{2t} & 3e^t - 3e^{2t} + 4e^{2t} \cdot t \\ 0 & e^{2t} & 2e^{2t} t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$= [x_1 \; x_2]$

$\underline{\underline{\dot{\phi} = A\phi}}$ ✓ Probe: $\phi(0) = id$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} \underbrace{e^0}_{=1} & \cancel{-2e^0 + 2e^0} & \cancel{3e^0 - 3e^0 + 4e^0 \cdot 0} \\ 0 & \underbrace{e^0}_{=1} & \cancel{2e^0 \cdot 0} \\ 0 & 0 & \underbrace{e^0}_{=1} \end{pmatrix} = id \quad ✓$$

Aufgabe 7.3

(iv)

Aufgabe 7.3

(iv)

Aufgabe 8.1

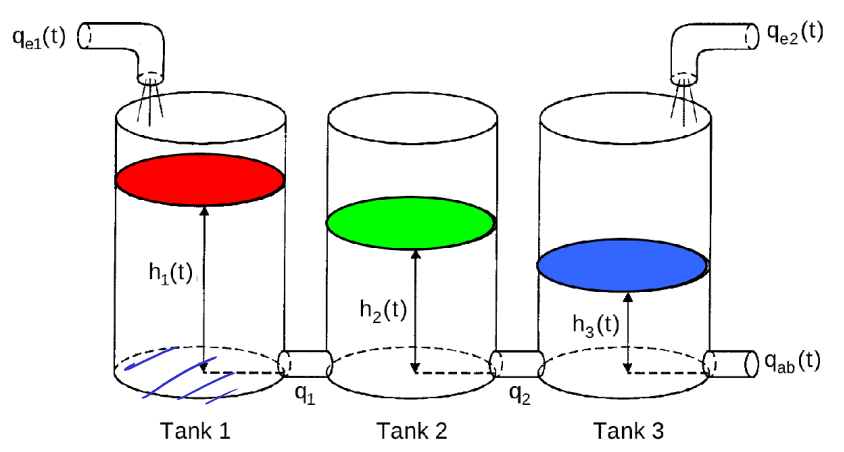
Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit) q_{e1} bzw. q_{e2}, aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz q_{ab} ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände h1, h2, h3 (das sind also die Ausgänge).

Gesetz von Torricelli:

$$
\begin{aligned}
q_{ab} &= \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3}, \\
q_i &= \mu\sqrt{2g}\,sign(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|},
\end{aligned}
$$

sowie g, μ, $F > 0$, $q_{ei} \geq 0$, $h_i \geq 0$.

Aufgabe 8.1



(i) Modellieren Sie die Strecke als Regelungssystem in Zustandsform mit den Zuständen h_1, h_2, h_3 und den Eingängen q_{e1}, q_{e2}.

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = g(x, u),$$

$$\dot{V} = \Delta Q \Rightarrow V = F \cdot h$$

$$\dot{V} = F \cdot \dot{h} \Rightarrow \dot{h} = \frac{\Delta Q}{F}$$

$$\dot{h}_1 = \frac{q_{e1} - q_1}{F} = \frac{\overset{=u_1}{q_{e1}} - \mu\sqrt{2g}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2)\sqrt{|h_1 - h_2|}}{F}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{q_1 - q_2}{F} = \frac{\sqrt{2g}\,\mu\left(\sqrt{|h_1 - h_2|}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2) - \sqrt{h_2 - h_3}\cdot\mathrm{sign}(h_2 - h_3)\right)}{F}$$

Aufgabe 8.1

(i) Systemmodellierung:

$$\dot{h}_3 = \frac{q_2 - q_{ab} + q_{e2}}{F} = u_2$$

$$= \frac{\sqrt{2g}\,\mu\left(\sqrt{h_2 - h_3}\,\mathrm{sgn}(h_2 - h_3) - \sqrt{h_3}\right)}{F} + \frac{u_2}{F}$$

$$\begin{cases} x = [h_1 \;\; h_2 \;\; h_3] \\ u = [q_{e1} \;\; q_{e2}] \end{cases}$$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix}$$

$h_1 \geq 0,\; h_2 \geq 0,\; h_3 \geq 0,$

$u_1 \geq 0$ und $u_2 \geq 0$

$$g(x,u) \Rightarrow y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = g(x,u)$$

Aufgabe 8.1

(ii) Ruhelagen: $\dot{x} = 0$, $f(x,u) = 0$

$F = 1$ und $\mu\sqrt{2g} = 1$

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{h_1 - h_2}\,\mathrm{sgn}(h_1 - h_2) \\ \sqrt{|h_1 - h_2|}\,\mathrm{sig}(h_1 - h_2) - \sqrt{h_2 - h_3}\,\mathrm{sgn}(h_2 - h_3 \\ \sqrt{|h_2 - h_3|}\,\mathrm{sgn}(h_2 - h_3) - \sqrt{|h_3|} + u_2 \end{pmatrix}$$

$h_1 \geq h_2 \geq h_3$:

$f_1(x,u) = 0 \rightarrow u_1 - \sqrt{h_1 - h_2} = 0 \xrightarrow{\text{Ruhelage}} u_{1_0} = \sqrt{h_{1_0} - h_{2_0}}$ //

$f_2(x,u) = 0 \rightarrow \sqrt{h_1 - h_2} - \sqrt{h_2 - h_3} = 0 \quad \sqrt{h_{1_0} - h_{2_0}} = \sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}}$ (II)

$f_3(x,u) = 0 \rightarrow \sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}} - \sqrt{h_{3_0}} + u_{2_0} = 0 \rightarrow \sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}} - \sqrt{h_{3_0}} = -v_{2_0}$

Aufgabe 8.1

(ii) Ruhelagen: $u_0, x_0 \rightarrow$ konstanten.

$$f(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} u_{10} - \sqrt{h_{10} - h_{20}} \\ \sqrt{h_{10} - h_{20}} - \sqrt{h_{20} - h_{30}} \\ \sqrt{h_{20} - h_{30}} - \sqrt{h_{30}} + u_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0, u_0) \\ f_2(x_0, u_0) \\ f_3(x_0, u_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$f_1 + f_2 + f_3 \rightarrow -\sqrt{h_{30}} + u_{10} + u_{20} = 0$$

$$\boxed{h_{30} = (u_{10} + u_{20})^2} \quad //$$

$$f_1 + f_2 \rightarrow -\sqrt{h_{20} - h_{30}} + u_{10} = 0$$

$$\boxed{h_{20} = 2u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2} \quad //$$

$$f_1 = -\sqrt{h_{10} - h_{20}} + u_{10} = 0 \rightarrow \boxed{h_{10} = 3u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2} \quad //$$

Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$
$$y = C\Delta x + D\Delta u$$