Regelungstechnik

6. Übung

Victor Cheidde Chaim

28. Februar 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

WOK-Verfahren

Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der Wurzelort ist der geometrische Ort der Lösungen (Wurzeln) der charakteristischen Gleichung

$$\boxed{1 + G_0(s) = 0}$$

des geschlossenen Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die Wurzelortskurve (WOK) stellt die Abhängigkeit der Wurzelorte von einem Parameter (vielfach der Verstärkung K_0) des offenen Regelkreises dar.

$$\boxed{1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0}$$

Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$\boxed{C(s) = N_0(s) + Z_0(s)}$$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

Aufgabe 6.1

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und ein Regler mit Übertragungsfunktion $R(s)$,

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+4)^2}, \qquad R(s) = k.$$

Hier wird neben der Verstärkung k als Parameter aufgefaß.

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom von G_0. (Im Zusammenhang mit WOKn wird niemals gekürzt; bei mehr fachen Nullstellen ist die Vielfachheit anzugeben.)

$\boxed{m = 1}$

NS: $s+1 = 0 \Rightarrow n_1 = -1 \Rightarrow$ n und m

Pole: $s(s+2)(s+4)^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0,\ p_2 = -2,\ p_3 = -4,\ p_4 = -4$

$\boxed{n = 4}$

Aufgabe 6.1

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten.

Pole NS

5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$n - m$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n - m$ Asymptoten.

Anzahl der Pole

$n = 4,\ m = 1 \Rightarrow \underline{\underline{n - m = 3}} \Rightarrow 3$ Äste $\to \infty$ ✓

Anzahl der Nullstellen

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten.

8	Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt σ_W)	Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse. $\sigma_W = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m}$ für $n - m \geq 2$

$$\sigma_W = \frac{(-2) + (-4) + (-4) + 0 - (-1)}{3} = -3$$

✓

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten.

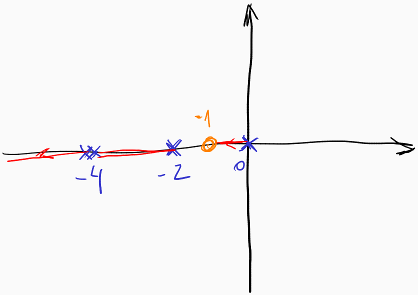
7	Winkel der Asymptoten	Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus $\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[\varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n-m.$

$$k = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{(2-1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \\ \varphi_2 = \frac{(2 \cdot 2-1) \cdot \pi}{3} = \pi \\ \varphi_3 = \frac{(2 \cdot 3-1)\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \; // \end{cases}$$

Aufgabe 6.1

(iii) Bestimmen die Intervalle der reellen Achse, die zur WOK gehören.

3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von Polen und Nullstellen ungerade [gerade]^2 ist, ist ein Wurzelort.



Pole : $-4, -4, -2, 0$

NS : -1

Intervall : $\langle -1, 0 \rangle, \langle -\infty, -2 \rangle$

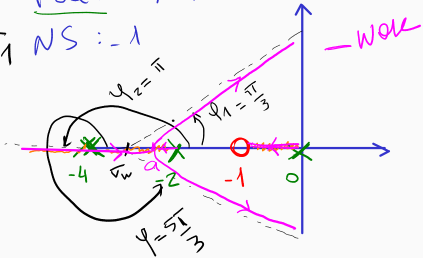
(iv) Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den vorangegangenen Teilaufgaben sowie ggf. weiterer Konstruktionsregeln die WOK.

10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	Allgemein gilt am Verzweigungspunkt a: $\frac{\mathrm{d}G_0(s)}{\mathrm{d}s}\Big\vert_{s=a} = 0$ Für $a \neq p_i$ und $a \neq n_i$ gilt damit: a) reelle Pole und Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a-n_i}$

$$\frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a+1}$$

Pole: $-4, -4, -2, 0$

NS: -1



Reele Lösung:

$\Rightarrow$ $a \simeq -2{,}6$

Aufgabe 6.1

Intervalle: $\{-1,0\},\ \underbrace{\{4,-2\},\ \{-6-2\}}_{\{-6,-2\}}$

(v) Lösen die vorstehenden Aufgaben erneut, diesmal jedoch für die durch $R(s) = k(s+6)$ gegebene Übertragungsfunktion des Reglers.

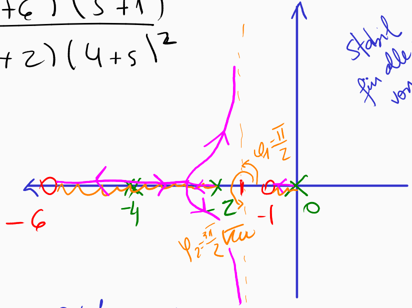
$$G_0(s) = R(s)\,G(s) = \frac{k(s+6)(s+1)}{s(s+2)(4+s)^2}$$

Pole: $-4, -4, -2, 0$, $n = 4$

NS: $-6, -1$, $m = 2$

$n - m = 2 \Rightarrow 2$ Äste $\to \infty$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \sigma_w = \frac{-4-4-2+6+1}{2} = -1{,}5$



stabil für alle werte von k!

Aufgabe 6.2

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$

$$G(s) = \frac{\alpha/3 + s}{s^2(s+3)},$$

Dabei ist α ein Parameter. Wie betrachten die Wurzelortskurve (WOK) unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h, eines P-Reglers mit positiver Verstärkung).

(i) Bestimmen Sie für alle drei Fälle, d.h., für $\alpha \in \{1, 5, 1/2\}$, jeweils alle Verzweigungspunkte der WOK.

(ii) Skizzieren Sie die WOK in allen drei Fällen.

Aufgabe 6.2

i) $G(s) = \dfrac{\alpha/3 + s}{s^2(s+3)}$, 1. Fall $\alpha = 1$

$G(s) = \dfrac{1/3 + s}{s^2(s+3)}$

NS: $-1/3$ $(m=1)$

PS: $0, 0, -3$ $(n=3)$

$n - m = 2$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

Regel 10: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{3+a} = \dfrac{1}{1/3 + a} \Rightarrow \boxed{a = -1}$

Bedingung für WOK:

$1 + G_0 = 0 \Rightarrow \left(s + \frac{1}{3}\right)k + s^2(3+s) = 0$ für $s^2(3+s) \neq 0$

$\left(a + \frac{1}{3}\right)k + a^2(3+s) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}k + 1(2) = 0 \Rightarrow k = 3$

$k > 0$ ✓

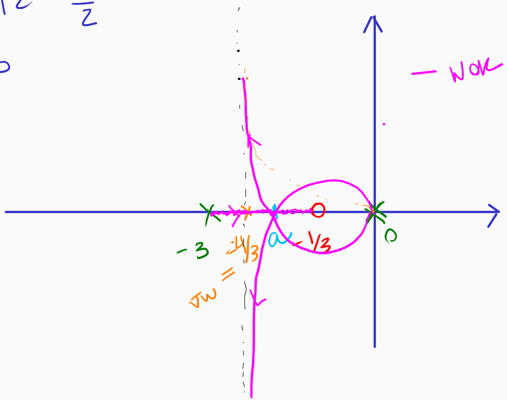
iii) $\alpha = 1$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$\sigma_w = -4/3$ $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

2 Äste → ∞

Pole: −3, 0, 0

NS: −1/3



Aufgabe 6.2

i) $\alpha = 5$ (2. Fall) Pole: $-3, 0, 0$

NS: $-5/3$

$$G(s) = \frac{5/3 + s}{s^2(s+3)}$$

$\sigma_W = -2/3$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{3+a} = \frac{1}{5/3+a} \Rightarrow a = -2 \pm i$$

1. Bedingung: Ist a Teil der WOK?

$1 + G_0(s) = 0 \rightarrow 1 + G_0(a) = 0 \rightarrow K = 3 \pm 6i$ → kein reeller Wert

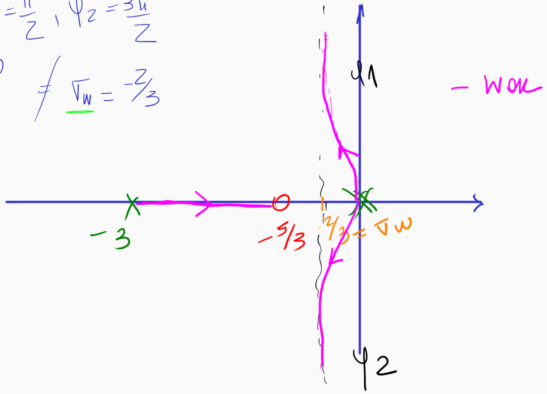
↳ kein Teil der WOK!

ii) $\alpha = 5$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

Pole: $-3, 0, 0$

NS: $-5/3$

$\sigma_W = -2/3$



Aufgabe 6.2

i) 3. Fall) $\alpha = 1/2$, Pole: $-3, 0, 0$ NS: $-1/6$ $G(s) = \frac{(1/6 + s)}{s^2(s+3)}$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{3+a} = \frac{1}{1/6 + a} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \approx -1{,}4 \\ a_2 \approx -0{,}36 \end{cases}$$

Teil der WOK?

$$1 + G(a) = 0 \rightarrow k_1 = \frac{3(222 + 43\sqrt{17})}{16(17 + 3\sqrt{17})} > 0 \checkmark$$

Ja!

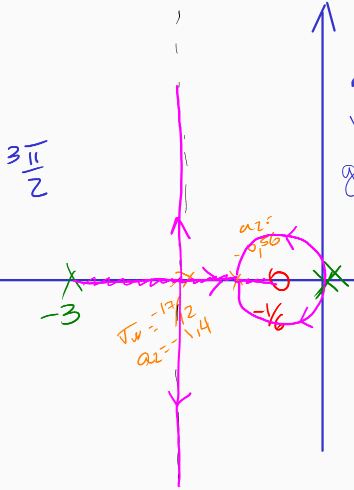
$$k_2 = \frac{3(-221 + 43\sqrt{17})}{16(-17 + 3\sqrt{17}} > 0 \checkmark$$

$$\begin{cases} a_1 \approx -1{,}4 \\ a_2 \approx -0{,}36 \end{cases}$$

Pole: $-3, 0, 0$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \ \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

NS: $-1/6$



- Es gibt zwei Verzweigungspunkte, einer geht in die reale Achse und der andere geht aus.

Aufgabe 6.3

i)
Bedingung: $-10 < -\frac{1}{k} < -1$

iv)
Bedingung: $-\frac{1}{k} < 10$

ii)
Bedingung: $10 > -\frac{1}{k} > 1$

v)
Bedingung: $-\frac{1}{k} < -10$

iii)
Bedingung: $-10 < -\frac{1}{k} < 10$

vi)
Bedingung: $-\frac{1}{k} < -10 \;||\; -\frac{1}{k} > 10$

Aufgabe 6.3

i) $-10 < -\frac{1}{k} < -1 \xrightarrow{(\cdot -1)} 10 > 1/k > 1 \xRightarrow{(\;)^{-1}}$

$$\boxed{\frac{1}{10} < k < 1}$$

ii) $10 > -1/k > 1 \longrightarrow -10 < 1/k < -1 \Rightarrow$

$$\boxed{-\frac{1}{10} > k > -1}$$

Aufgabe 6.3

iii) $-10 < -1/k < 10$, $k > 0$ $\rightarrow$ $-10 < -1/k$

$10 > 1/k$

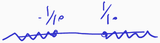
$1/10 < k$

$k < 0$ $\rightarrow$ $-1/k < 10$

$1/k > -10$

$k < -1/10$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{10} < k \;||\; k < \frac{-1}{10}$ ✓



iv) $-1/k < 10$, $k > 0$ ✓

$-1/k < 10$, $1/k > -10$

$k < -1/10 \;||\; k > 0$ ✓

v) $\frac{-1}{k} < -10$ $\quad k > 0$ und

$\frac{1}{k} > 10 \Rightarrow k < 1/10$ ✓

vi) $\underbrace{-\frac{1}{k} < -10}_{k>0} \;||\; \underbrace{-\frac{1}{k} > 10}_{k<0}$

$1/k > 10 \qquad 1/k < -10 \Rightarrow \underline{0 < k < 1/10 \;||\; -1/10 < k < 0}$ ✓

$k < 1/10 \qquad k > -1/10$