Regelungstechnik

5. Übung

Victor Cheidde Chaim

21. Februar 2022

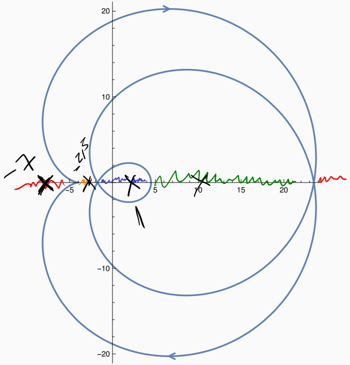
Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 4.3

$$G(s) = \frac{2\left(64s^2 + 8s + 17\right)}{\left(s^2 + 2s + 2\right)^2} - 4$$

1. Geben Sie in jedem “Fenster” sowie im Außengebiet der Kurve jeweils einen Punkt auf der reellen Achse an, wenn es einen solchen Punkt gibt.
2. Bestimmen Sie, wie oft der Punkt umschlungen wird (Durchtritte durch die reelle Achse rechts vom Punkt, vor und zurück mit ± 1 bewertet, wie beim letzten Übungstermin).
3. Bestimmen Sie für jedes Fenster, das einen Punkt nach 1 enthält, näherungsweise das dazugehörende Intervall der Werte von k.
4. Berechnen Sie zur Probe für jeden markierten Punkt die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises, bestimmen Sie die Anzahl der instabilen Pole, und vergleichen Sie (Rechner benutzen!).

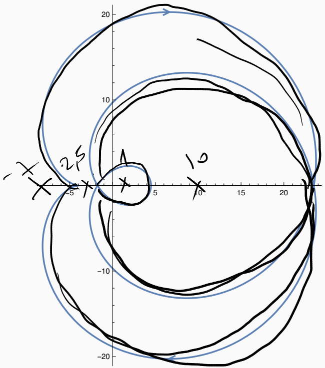
1. Geben Sie in jedem "Fenster" sowie im Außengebiet der Kurve jeweils einen Punkt auf der reellen Achse an, wenn es einen solchen Punkt gibt.



Markierte Punkte:
$\{-7, -\frac{5}{2}, 1, 10\}$

i) In jedem "Fenster" sowie im Außengebiet der Kurve könnten wir, zum Beispiel, die Punkt 10, 1, -5/2 und -7 wählen.

2. Bestimmen Sie, wie oft der Punkt umschlungen wird.

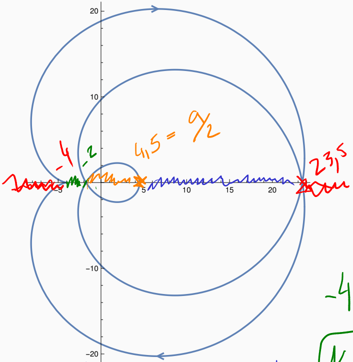


ii)

Punkt	Umschließungen
-7	0
-5/2	1
1	3
10	2

Aufgabe 4.3

3. Bestimmen Sie für jedes Fenster, das einen Punkt nach 1 enthält, näherungsweise das dazugehörende Intervall der Werte von k.



$-\frac{1}{k} > \frac{47}{2} \to \frac{1}{k} < -\frac{47}{2} \to k > -\frac{2}{47}$

$-\frac{1}{k} < -4 \to \frac{1}{k} > 4, \; k < \frac{1}{4}$

$\boxed{-\frac{2}{47} < k < \frac{1}{4}}$

$-4 < -1/k < -2 \to 4 > 1/k > 2 \to$

$\boxed{1/4 < k < 1/2}$

$-2 < -1/k < 9/2 \to$

$-2 < -1/k \to 2 > 1/k$

$\boxed{k > 1/2}$

$-1/k < 9/2 \to 1/k > -9/2$

$\boxed{k < -2/9}$

$9/2 < -1/k < \frac{47}{2} \to -9/2 > 1/k > -\frac{47}{2}$

$\boxed{-2/9 < k < -2/47}$

Intervall für k: $-3/47 < k < 1/4$

$\rightarrow 1/4 < k < 1/2$

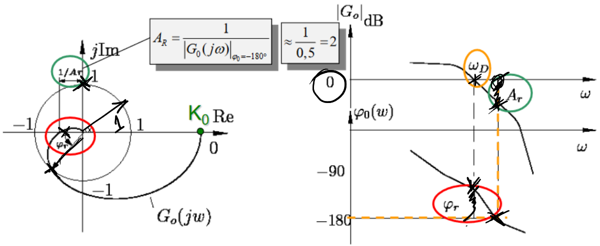
$k < -2/9$ oder $k > 1/2$

$-2/9 < k < -2/47$

4. Berechnen Sie zur Probe für jeden markierten Punkt die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises, bestimmen Sie die Anzahl der instabilen Pole, und vergleichen Sie (Rechner benutzen!).

k	Pole
$\frac{1}{7}$	{−1.88 − 6.78 i, −1.88 + 6.78 i, −0.123 − 0.543 i, −0.123 + 0.543 i}
$\frac{2}{5}$	{−0.023 − 0.489 i, −0.023 + 0.489 i, −11.0, 7.06}
−1	{0.122 − 0.390 i, 0.122 + 0.390 i, −6.73, 2.49}
$-\frac{1}{10}$	{0.390 − 1.202 i, 0.390 + 1.202 i, −4.56, −0.216}

Stabilitätsreserve (2)



Amplituden- und Phasenrand in der Ortskurvendarstellung

Amplituden- und Phasenrand im Bode-Diagramm

Durchtrittsfrequenz ω_D: Frequenz, bei der die Amplitudenkennlinie die 0-dB-Linie schneidet.

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek — Regelungstechnik

Stabilitätsreserve (3)

Definition 2.3 : Amplituden– und Phasenrand

1. Der Phasenrand

$$\varphi_R = 180^\circ + \varphi(\omega_D)$$

ist der Abstand der Phasenkennlinie von der -180°–Geraden bei der Durchtrittsfrequenz ω_D, d. h. beim Durchgang der Amplitudenkennlinie durch die 0–dB–Linie ($|G_0| = 1$).

2. Als Amplitudenrand

$$A_R = \frac{1}{|G_0|}\Big|_{\varphi_0=-180^\circ} \; ; A_{R_{dB}} = -\underbrace{|G_0|_{dB}}_{\boxed{20 \log_{10} 1 \; - \; 20 \log_{10} |G_0|}}\Big|_{\varphi_0=-180^\circ}$$

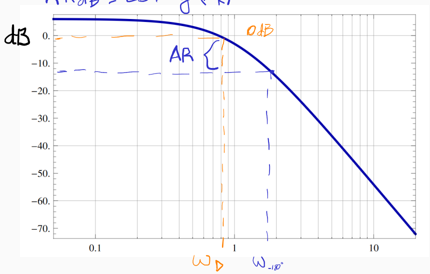
wird der Abstand der Amplitudenkennlinie von der 0–dB–Linie beim Winkel $\varphi_0 = -180^\circ$ bezeichnet. □

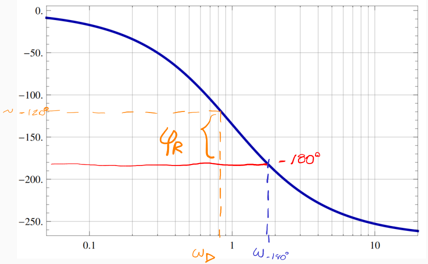
Für die unten als Bode-Diagramm skizzierte Übertragungsfunktion gebe man Amplituden- und Phasenrand an. Für welche Reglerverstärkungen ist der geschlossene Kreis stabil?

- $\varphi_R = 180° + \varphi(\omega_D) \overset{\sim}{=} 60° > 0$ ✓

- $A_{R\,dB} = -\left| |G_0|_{dB} \right|_{\varphi_0 = -180°} \overset{\sim}{=} 12\,dB$

$A_{R\,dB} = 20 \log(A_R) \Rightarrow A_R = 10^{\frac{A_{R\,dB}}{20}} = 10^{\frac{12}{20}} \overset{\sim}{=} 4 > 0$ ✓





Reglerverstärkung: $K < 4 \rightarrow$ geschl. Kreis stabil ✓

$K \cdot G_0$ ↳ A_R

WOK-Verfahren

Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der Wurzelort ist der geometrische Ort der Lösungen (Wurzeln) der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0$$

des geschlossenen Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die Wurzelortskurve (WOK) stellt die Abhängigkeit der Wurzelorte von einem Parameter (vielfach der Verstärkung K_0) des offenen Regelkreises dar.

$$1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0$$

Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$\boxed{C(s) = N_0(s) + Z_0(s)}$$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek — Regelungstechnik

Aufgabe 5.2

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und ein PI-Regler mit Übertragungsfunktion $R(s)$,

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad R(s) = k\left(\frac{1}{sT} + 1\right).$$

Hier wird neben der Verstärkung k auch die Zeitkonstante $T > 0$ als Parameter aufgefaßt und die WOK für feste Werte von T betrachtet.

(i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion G_0 des offenen Kreises in Pol-Nullstellen-Form.

$$G_0(s) = G(s)\,R(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot k\left(\frac{1}{sT} + 1\right)$$

$$= \frac{k\left(\frac{1}{T} + s\right)}{(s+1)(s+2)s} \quad //$$

(ii) Bestimmen Sie die Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom von G_0. (Im Zusammenhang mit WOKn wird niemals gekürzt; bei mehr fachen Nullstellen ist die Vielfachheit anzugeben.)

$$G_0(s) = \frac{k\,(1/T + s)}{(s+1)(s+2)\,s}$$

Pole: $(s+1)(s+2)s = 0 \rightarrow \begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \\ p_3 = 0 \end{array}$

NS: $k\,(1/T + s) = 0 \rightarrow n_1 = -1/T$

Aufgabe 5.2

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten, jeweils in Abhängigkeit von T.

n = Anzahl der Pole
m = Anzahl der Nullstellen

3 1

5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$n - m$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n - m$ Asymptoten.

Anzahl der Äste im ∞ $\Rightarrow$ $n - m = 3 - 1 = 2$ Äste $\to \infty$

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten, jeweils in Abhängigkeit von T.

8	Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt σ_W)	Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse. $\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m}$ für $n - m \geq 2$

$$\sigma_W = \frac{(-1)+(-2)+0-(-1/T)}{2} = 0{,}5\left(-3+\frac{1}{T}\right)$$

Aufgabe 5.2

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten, jeweils in Abhängigkeit von T.

7	Winkel der Asymptoten	Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus $$\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[\varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n-m.$$

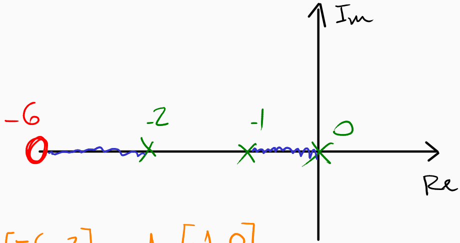
$k = 1, 2 \quad (n - m = 2) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \frac{(2-1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\ \varphi_2 = \frac{(4-1)\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

(iv) Bestimmen Sie für den Fall $T = 1/6$ die Intervalle der reellen Achse, die zur WOK gehören.

3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von Polen und Nullstellen ungerade [gerade]^2 ist, ist ein Wurzelort.

Pöle: $0, -1, -2$

NS: $-1/T$, $T = \frac{1}{6} \Rightarrow -6$



Interval $[-6, -2]$ und $[-1, 0]$

(v) Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den vorangegangenen Teilaufgaben sowie ggf. weiterer Konstruktionsregeln die WOK für den Fall $T = 1/6$.

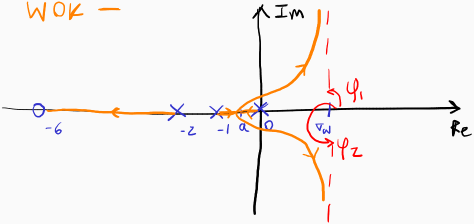
10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	Allgemein gilt am Verzweigungspunkt a: $\frac{dG_0(s)}{ds}\Big\vert_{s=a} = 0$ Für $a \neq p_i$ und $a \neq n_i$ gilt damit: a) reelle Pole und Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a-n_i}$

$\Rightarrow T = 1/6, \; \sigma_w = 0{,}5\left(-3 + \frac{1}{T}\right) = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a+6}$

$\hookrightarrow a \cong -0{,}4$

WOK —

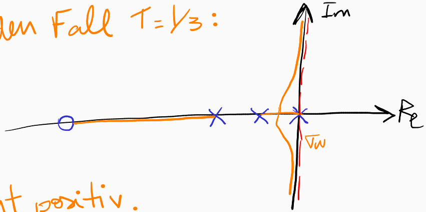


(vi) Die Zeitkonstante T des Integralanteils des Reglers soll nun so vergrößert werden, daß der geschlossene Kreis für alle $k > 0$ stabil ist: Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von (iii) den minimalen Wert für T_0 derart, daß für alle $T > T_0$ der Wurzelschwerpunkt negativ ist.

$\sigma_W < 0: \quad \sigma_W = 0{,}5\left(-3+\frac{1}{T}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2T} < 0$

$\frac{1}{2T} < \frac{3}{2}, \quad T > \frac{1}{3}, \quad T_0 = \frac{1}{3}. \quad \boxed{T < 0 \;\|\; T > \frac{1}{3}}$

Für den Fall $T = 1/3$:



Re(WOK) nicht positiv.

Aufgabe 5.3

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$

$$G(s) = \frac{K\,s}{(s+3)(s+4)(s-4)}.$$

$\mathrm{Re}(p) > 0 \rightarrow$ instabil

Ziel der Regelung ist Stabilität des geschlossenen Kreises.

(i) Skizzieren Sie die WOK unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h., eines P-Reglers). Für welche Reglerverstärkungen ist der geschlossene Kreis stabil?

$a \Rightarrow \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a-4} = \frac{1}{a} \Rightarrow a \approx -3{,}5$

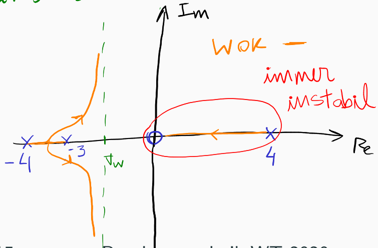
Pole: $-3, -4, 4$, NS: 0

$n - m: 3 - 1 = 2$

$\varphi_1 = \pi/2$

$\varphi_2 = 3\pi/2$

$\sigma_w = \frac{-3-4+4-0}{2} = -\frac{3}{2}$



Aufgabe 5.3

(i) Skizzieren Sie die WOK unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h., eines P-Reglers). Für welche Reglerverstärkungen ist der geschlossene Kreis stabil? Für keinen Wert von K.

Immer instabil.

Aufgabe 5.3

(ii) Verändern Sie die WOK durch Einfügen eines reellen Pols und einer reellen Nullstelle so, daß der geschlossene Kreis für wenigstens eine Reglerverstärkung stabil ist. Die Übertragungsfunktion R des Reglers ist also gegeben durch

$$R(s) = k\frac{s - s_2}{s - s_1},$$

und die Parameter k, s_1 und s_2 sollen geeignet bestimmt werden. (Machen Sie sich klar, wo s_1 und s_2 ungefähr platziert werden müssen, und benutzen Sie danach einen Rechner und eine Software Ihrer Wahl.)

RT-Website:
↳ Matlab:
"WOK_Aufgabe4p3_Matlab.zip"

Vorueberlegungen: Wie waehlt man s_1, s_2?

s_1:
- Intervall [0,4] auf reeller Achse stoert; in $[0,\infty[$ darf kein vollstaendiger Astder WOK liegen
- nur zu erreichen durch $s_1 > 0$
- je groeszer s_1, desto groeszer Wurzelschwerpunkt (grosz = schlecht fuer Stabilitaet)

s2:
- je groeszer s_2, desto kleiner Wurzelschwerpunkt (klein = gut)
- s_2 darf nicht rechts von $\min\{4, s_1\}$ liegen, denn sonst wiederum vollstaendiger Ast der WOK in $[0,\infty[$
- 1. Fall: $0 <= s_2 <= \min\{4, s_1\}$: koennte klappenaber WOK koennte auch beide Intervalle verbinden; wir probieren es nicht aus

- 2. Fall: $s_2 < 0$: Wie s_1, s_2 waehlen, damit Wurzelschwerpunkt negativ?
$\sigma_w = (-3 + s_1 - s_2)/2 < 0 \iff s_1 < s_2 + 3 < 3$

Jetzt einige werte ausprobieren, zB $s_1=1/2$, $s_2= -2$

Nützliche Matlab-Funktion:
→ rlocus
→ sisotool