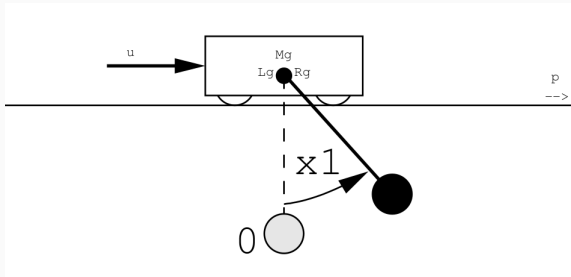


Aufgabe 9.2

Betrachtet werde ein auf einem Wagen drehbar befestigter Stab der Länge L ; siehe Abbildung. Der Stab ist masselos, trägt an seinem Ende eine Punktemasse m , und bewegt sich in einer Ebene unter Einfluß der Fallbeschleunigung g und der Beschleunigung u des Wagens. Die Beschleunigung u des Wagens wird dabei als Eingang betrachtet; die Reibung im Gelenk des Stabes ist viskos mit Reibungskoeffizient ρ . Für die Parameter nehmen wir $L > 0$, $m > 0$, $g > 0$ und $\rho \geq 0$ an.



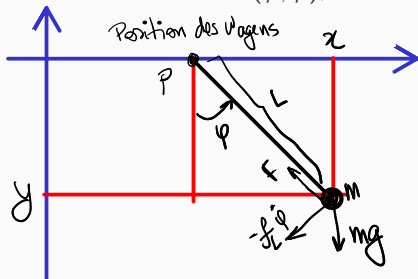
Aufgabe 9.2

(i) Modellieren Sie die Bewegung des Stabes in Zustandsform

$$\dot{x} = f(x, u),$$

$$y = g(x, u)$$

mit dem Zustand $x = (\varphi, \dot{\varphi})$, dem Ausgang φ und dem Eingang u .



Geometrie:

$$x = p + L \sin(\varphi)$$
$$y = -L \cos(\varphi)$$

Eigene Trägheit:

$$\dot{x} = \dot{p} + L \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = \ddot{p} + L (-\sin(\varphi) (\dot{\varphi})^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi})$$

$$\dot{y} = L \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$\ddot{y} = L (\cos(\varphi) (\dot{\varphi})^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi})$$

Aufgabe 9.2

(i) • Moment im Gelenk: $-j\dot{\varphi}$ (Reibung im Gelenk)

Kraft auf m : $\frac{f}{L}\dot{\varphi}(-\cos(\varphi), -\sin(\varphi))$

• Stabkraft: $F(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$

• Gewichtskraft: $(0, -mg)$

⇒ Kraftgleichgewichte:

$$\text{horizontal: } m\ddot{\varphi} + mL\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - mL\sin(\varphi)(\dot{\varphi})^2 = -\frac{f}{L}\dot{\varphi}\cos(\varphi) - F\sin(\varphi) \quad (1)$$

$$\text{vertical: } mL\cos(\varphi)(\dot{\varphi})^2 + mL\sin(\varphi)\ddot{\varphi} = -\frac{f}{L}\dot{\varphi}\sin(\varphi) + F\cos(\varphi) - mg \quad (2)$$

Gewichtete Addition beide Gleichungen: $\cos(\varphi) \cdot (1) + \sin(\varphi) \cdot (2)$:

Aufgabe 9.2

(i) ("c" = $\cos(\varphi)$, "s" = $\sin(\varphi)$)

$$m\ddot{\rho}c + mLc^2\ddot{\varphi} - \cancel{mLsc(\dot{\varphi})^2} + \cancel{mLsc(\dot{\varphi})^2} + mLs^2\ddot{\varphi} =$$

$$= -\frac{f}{L}\dot{\varphi}^2 - \cancel{Fsc} - \frac{f}{L}\dot{\varphi}^2 + \cancel{Fsc} - mgf$$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho}\cos(\varphi) + mL\ddot{\varphi} = -\frac{f}{L}\dot{\varphi} - mg\sin(\varphi) //$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{f}{L}\sin(\varphi) - \frac{f}{mL^2}\dot{\varphi} - \ddot{\rho}\frac{1}{L}\cos(\varphi), \quad x_1 := \varphi, \quad x_2 := \dot{\varphi}, \quad u := \ddot{\rho} :$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{f}{mL^2}x_2 - \frac{u\cos(x_1)}{L} \\ y = x_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{Also: } g(x_1, u) = x_1,$$

$$f(x_1, u) = \left(x_2, -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{f}{mL^2}x_2 - \frac{u}{L}\cos(x_1) \right) //$$

Aufgabe 9.2

(ii) Bestimmen Sie alle Ruhelagen (x, u) .

$$\text{Ruhelagen: } (x_0, u_0) \rightarrow \dot{x} = 0$$

$$\dot{x}_1 = 0 \iff x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \iff g \sin(x_1) + u \cos(x_1) = 0$$

$$\iff \underbrace{(\cos(x_1) = 0 \wedge x_1 \in \pi \mathbb{Z})}_{\text{unmöglich}} \vee (\cos(x_1) \neq 0 \wedge \tan(x_1) = -\frac{u}{g})$$

$$\iff \tan(x_1) = -\frac{u}{g} //$$

$$\text{Ruhelage: } \{(x_1, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid \tan(x_1) = -\frac{u}{g}\}$$

Aufgabe 9.2

(ii) Speziell RL der Form (x_{10}) :

$$(x_{10}) \text{ RL} \iff \sin(x_1) = 0 \iff x_1 \in \pi \mathbb{Z}$$

Aufgabe 9.2

(iii) Linearisieren Sie das System in den Ruhelagen. Berechnen Sie also die Matrizen

$$A := D_1 f(x, u), B := D_2 f(x, u), C := D_1 g(x, u), D := D_2 g(x, u)$$

für alle in (ii) bestimmten Ruhelagen (x, u) .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(x) + \frac{u}{L} \sin(x) & -\frac{f}{mL^2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$C = (1, 0) \quad , \quad D = 0$$

Aufgabe 9.2

$$(iii) A_{z1} = -\frac{g}{L} \cos(x_1) + \frac{u}{L} \sin(x_1)$$

$$\sin(x_1) = -\frac{u}{g} \cos(x_1) \quad (\text{aus Teilaufgabe(ii)})$$

$$A_{z1} = -\frac{1}{gL} (g^2 + u^2) \cos(x_1) \quad //$$

$$x_1 \in \arctan\left(\frac{-u}{g}\right) \in \pi \mathbb{Z}, \quad \cos(\arctan(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Aufgabe 9.2

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad A_{21} &= -\frac{g+u^2}{gL} \frac{\text{sign}(\cos(x_1))}{\sqrt{1+(u/g)^2}} = -\frac{g+u^2}{L} \frac{\text{sign}(\cos(x_1))}{\sqrt{g^2+u^2}} = \\ &= -\frac{\sqrt{g^2+u^2}}{L} \text{sign}(\cos(x_1)) = -\frac{g}{L} \sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2} \text{sign}(\cos(x_1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2} \text{sign}(\cos(x_1)) & -\frac{f}{mL^2} \end{pmatrix},$$

Aufgabe 9.2

(iv) Ermitteln Sie für jede der Ruhelagen, für welche Parameterwerte die entsprechende Linearisierung asymptotisch stabil ist, und für welche Parameterwerte die entsprechende Linearisierung BIBO-stabil ist.

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{g \operatorname{sign}(\cos(x_1))}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{g}\right)^2} & s + \frac{f}{mL^2} \end{pmatrix}$$


$$= s^2 + s \frac{f}{mL^2} + \operatorname{sign}(\cos(x_1)) \frac{g}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{g}\right)^2}$$


Aufgabe 9.2

(iv) Hurwitz-Kriterium für 2×2 Matrizen:

$$\text{asy. stab.} \Leftrightarrow p > 0 \wedge \cos(x_1) > 0$$

* Spezialfall $u=0$:

$x_1 \in 2\pi \mathbb{Z}$:  : $\cos(x_1) = 1$, asy. stab. $\Leftrightarrow p > 0$

$x_1 \in \pi + 2\pi \mathbb{Z}$:  : $\cos(x_1) = -1 \Rightarrow$ nicht asy. stab.

Aufgabe 9.2

(iv) BIBO - Stabilität:

1. Fall: $\cos(x_i) > 0$ \wedge $\beta > 0$: BIBO-stabil (da asy. stab.)

2. Fall: $\beta = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha = -\frac{g}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{u}{g}\right)^2} \operatorname{sign}(\cos(x_i)) \neq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ wobei } \beta = -\frac{1}{L} \cos(x_i) \neq 0, \text{ und } C = (1, 0)$$

Aufgabe 9.2

(iv) Zur Feststellung, ob BIBO-Stabilität vorliegt, wird die Impulsantwort berechnet: $g(t) = c \cdot e^{At} \cdot B$. Zunächst wir bestimmen e^{At} :

$$A^0 = \text{id}, A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2k} = \begin{pmatrix} \alpha^k & \\ & \alpha^k \end{pmatrix}, A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^k \\ \alpha^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Summe: } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\alpha} t)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \cosh(\sqrt{\alpha} t) \end{aligned}$$

Aufgabe 9.2

$$\begin{aligned}
 \text{(iv) Z. Summe: } \sum_{k=0}^{\infty} A \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & \alpha^k \\ \alpha^{k+1} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\alpha})^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\alpha})^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sinh(\sqrt{\alpha}t)}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\alpha}t) & \sinh(\sqrt{\alpha}t)/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} \cosh(\sqrt{\alpha}t) & \cosh(\sqrt{\alpha}t) \end{pmatrix} \rightarrow g(t) = \frac{\sinh(\sqrt{\alpha}t) \beta}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\alpha > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} \sinh(\sqrt{\alpha}t) = \infty, \quad \beta/\sqrt{\alpha} \neq 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} |g(t)| dt \neq \infty$$

\Rightarrow nicht BIBO-stabil

Aufgabe 9.2

(iv) $\alpha < 0$: $\sinh(\sqrt{\alpha}t) = j \sin(\sqrt{|\alpha|}t) \Rightarrow \int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$
 \hookrightarrow nicht BIBO-stabil

3. Fall: $\cos(\alpha) < 0$ \wedge $\rho > 0$: Bleibt offen, aber prinzipiell auch über g bestimmbar.

