

## Regelungstechnik, WT 2024

# 8 Übung, 11.03.2024

**8.1 Aufgabe.** Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern.  $F$  bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit)  $q_{e1}$  bzw.  $q_{e2}$ , aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz  $q_{ab}$  ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände  $h_1, h_2, h_3$  (das sind also die Ausgänge).

Annahmen: Gesetz von Torricelli:

$$q_{ab} = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3},$$
$$q_i = \mu\sqrt{2g}\operatorname{sign}(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|},$$
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

sowie  $g, \mu, F > 0, q_{ei} \geq 0, h_i \geq 0$ .

- (i) Modellieren Sie die Strecke als Regelungssystem in Zustandsform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= g(x, u) \end{aligned}$$

mit den Zuständen  $h_1, h_2, h_3$  und den Eingängen  $q_{e1}, q_{e2}$ .

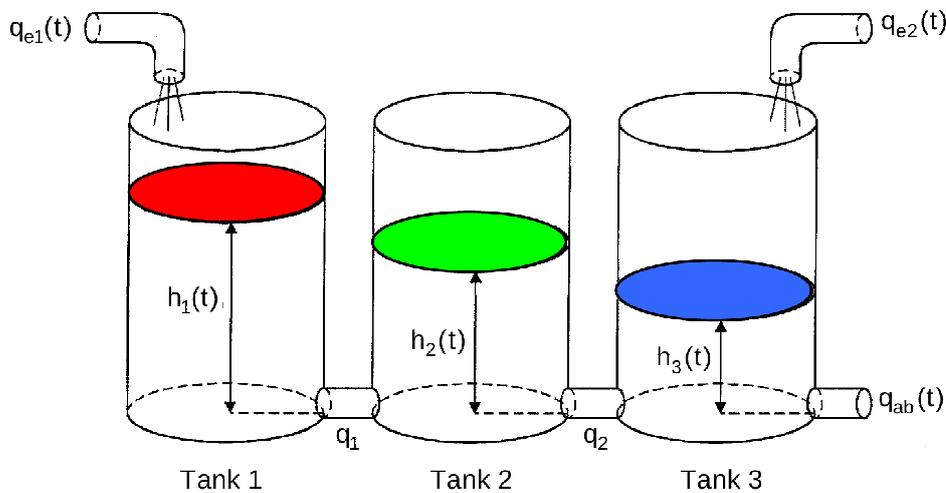
- (ii) Diese und alle folgenden Teilaufgaben: Nur für den Spezialfall  $F = \mu\sqrt{2g} = 1$  lösen!

Geben Sie Bedingungen an  $x$  und  $u$  an, die Ruhelagen charakterisieren. (Hinweis: Ruhelage:  $0 = f(x, u)$ . Zeigen Sie zuerst, daß in jeder Ruhelage gilt:  $h_1 \geq h_2 \geq h_3$ .)

- (iii) Linearisieren Sie das Zustandssystem in den Ruhelagen unter der Annahme  $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ . Berechnen Sie also die Matrizen

$$A := D_1f(x, u), B := D_2f(x, u), C := D_1g(x, u), D := D_2g(x, u)$$

für Ruhelagen  $(x, u)$ .



**8.2 Aufgabe.** Betrachtet wird das Zustandsraumssystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

mit den Werten für  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ , die in Aufgabe 8.1(iii) berechnet wurden.

- (i) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme  $h_1 > h_2 > h_3 > 0$  in jeder Ruhelage durch den Eingang  $\Delta q_{e1}$  allein steuerbar ist. Hinweis: Linearisiert wird im Punkt  $u = (q_{e1}, q_{e2})$  mit zugehörigem  $h$  wie bisher. Durch den Eingang  $\Delta q_{e1}$  allein steuerbar zu sein bedeutet, daß der zweite Eingang *der bereits vorliegenden Linearisierung* nicht benutzt wird, also stets den Wert 0 haben soll.

Überlegen Sie sich, wie die Anordnung reagiert, wenn Sie sich zunächst in einer Ruhelage befindet und Sie dann den Durchsatz  $q_{e1}$  erhöhen bzw. verringern. Kann es z.B. vorkommen, daß sich  $h_1$  und  $h_3$  verringern, während sich  $h_2$  vergrößert? Wie paßt das zur Steuerbarkeit?

- (ii) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme  $h_1 > h_2 > h_3 > 0$  in jeder Ruhelage allein durch Messung des Ausgangs  $\Delta h_3$  beobachtbar ist.

- (iii) Betrachten Sie hier die Linearisierung mit nur einem Eingang  $\Delta q_{e1}$  in der Ruhelage mit  $q_{e1} = q_{e2} = 1/2$  und geeigneten  $h_i$ .

Bestimmen Sie  $\Delta q_{e1}$  so, daß der Zustand  $\Delta h$  der Linearisierung in der Zeit 3 von 0 nach  $(-0.005, 0.005, -0.005)$  überführt wird. (Benutzen Sie ggf einen Rechner!)

□