

# Regelungstechnik

## 9. Übung

---

Victor Cheidde Chaim

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

## Aufgabe 7.3

Berechnen Sie die Transitionsmatrix  $\Phi(t) = e^{At}$  in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h., prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$

$$\Phi(0) = I$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt.

(i)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).

(ii)  $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

(iii)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha + 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$ , wobei  $\alpha = 0$  (Klausuraufgabe).

(iv) Wie vor, jedoch für  $\alpha = 1$  (Klausuraufgabe).

# Aufgabe 7.3

(iv)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$ ,  $\alpha=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Annotations:  $A_{11}$  (circled in orange),  $A_{12}$  (circled in green),  $A_{22}$  (circled in black).

$$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) \Rightarrow \dot{\phi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}$$

1.  $\phi_{11}$  skalar  $\rightarrow \phi_{11} = \exp(A_{11}t) = e^{1t} = e^t$

2.  $\phi_{22}$ : EW  $A_{22} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = 2}$

$(A_{22} - \lambda id) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , nilpotent  $\Rightarrow \exp(A_{22}t) = e^{2t} (id + t(A_{22} - id))$

$$\phi_{22} = \exp(A_{22}t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 7.3

$$(iv) \dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11}(t) & \dot{\phi}_{12}(t) \\ 0 & \dot{\phi}_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\dot{\phi}_{12} = A_{11} \phi_{12} + A_{12} \phi_{22} = \phi_{12} + [z e^{zt}, e^{zt} + 4e^{zt}t]$$

$$\dot{\phi}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x}_1 = x_1 + z e^{zt}$$

$$\phi_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \int_0^t e^{(t-z)} \cdot z e^{zz} dz = z e^t \int_0^t e^z dz$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + e^{zt} + 4e^{zt}t$$

$$= z e^t e^z \Big|_0^t = z e^t (e^t - 1)$$

$$x_2(t) = \int_0^t e^{(t-z)} \cdot (e^{zz} + 4e^{zz}z) dz = e^t \int_0^t e^z + 4e^z z dz$$

# Aufgabe 7.3

$$(iv) \quad x_2(t) = e^t \int_0^t e^z + 4e^z \cdot z dz = e^t \left[ e^z + 4(z-1)e^z \right] \Big|_0^t$$

$$= 3e^t - 3e^{zt} + 4e^{zt} \cdot t \quad //$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -2e^t + 2e^{zt} & 3e^t - 3e^{zt} + 4e^{zt} \cdot t \\ 0 & e^{zt} & ze^{zt} \cdot t \\ 0 & 0 & e^{zt} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\phi} = A\phi \quad \checkmark$$

Probe:  $\phi(0) = id$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} e^0 = 1 & -2e^0 + 2e^0 & 3e^0 - 3e^0 + 4e^0 \cdot 0 \\ 0 & e^0 = 1 & ze^0 \cdot 0 \\ 0 & 0 & e^0 = 1 \end{pmatrix} = id \quad \checkmark$$

# Aufgabe 8.1

Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern.  $F$  bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit)  $q_{e1}$  bzw.  $q_{e2}$ , aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz  $q_{ab}$  ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände  $h_1, h_2, h_3$  (das sind also die Ausgänge).

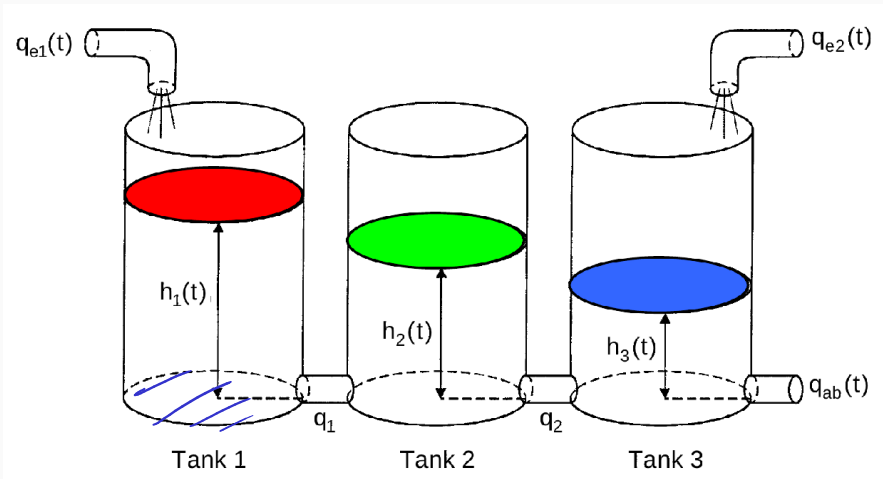
Gesetz von Torricelli:

$$q_{ab} = \mu \sqrt{2g} \sqrt{h_3},$$

$$q_i = \mu \sqrt{2g} \operatorname{sign}(h_i - h_{i+1}) \sqrt{|h_i - h_{i+1}|},$$

sowie  $g, \mu, F > 0, q_{ei} \geq 0, h_i \geq 0$ .

# Aufgabe 8.1



(i) Modellieren Sie die Strecke als Regelungssystem in Zustandsform mit den Zuständen  $h_1, h_2, h_3$  und den Eingängen  $q_{e1}, q_{e2}$ .

$$\dot{x} = f(x, u),$$

$$y = g(x, u),$$

$$\dot{V} = \Delta Q \Rightarrow V = F \cdot h$$

$$\dot{V} = F \cdot \dot{h} \Rightarrow \dot{h} = \frac{\Delta Q}{F}$$

$$\dot{h}_1 = \frac{q_{e1} - q_1}{F} = \frac{q_{e1} - \sqrt{2g} \operatorname{sign}(h_1 - h_2) \sqrt{|h_1 - h_2|}}{F}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{q_1 - q_2}{F} = \frac{\sqrt{2g} \left( \sqrt{|h_1 - h_2|} \operatorname{sign}(h_1 - h_2) - \sqrt{|h_2 - h_3|} \operatorname{sign}(h_2 - h_3) \right)}{F}$$

# Aufgabe 8.1

(i) Systemmodellierung:  $\dot{h}_3 = \frac{q_2 - q_{ab} + q_{ez} = u_2}{F}$

$$\begin{cases} x = [h_1 \ h_2 \ h_3] \\ u = [q_{e1} \ q_{e2}] \end{cases} = \frac{\sqrt{2g} \gamma (\sqrt{h_2 - h_3} \operatorname{sgn}(h_2 - h_3) - \sqrt{h_3})}{F} + \frac{u_2}{F}$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix}$$

$$h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, h_3 \geq 0,$$

$$u_1 \geq 0 \text{ und } u_2 \geq 0$$

$$g(x, u) \Rightarrow y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = g(x, u)$$



# Aufgabe 8.1

(ii) Ruhelagen:

$$\ddot{x}_0 = 0, \quad f(x,u) = 0$$

$$\underline{F=1 \text{ und } M \ddot{p}g=1}$$

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{h_1 - h_2} \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) \\ \sqrt{h_1 - h_2} \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) - \sqrt{h_2 - h_3} \operatorname{sgn}(h_2 - h_3) \\ \sqrt{h_2 - h_3} \operatorname{sgn}(h_2 - h_3) - \sqrt{|h_3|} + u_2 \end{pmatrix}$$

$$h_1 \geq h_2 \geq h_3 :$$

$$f_1(x,u) = 0 \rightarrow u_1 - \sqrt{h_1 - h_2} = 0 \xrightarrow{\text{Zukalage}} u_{1_0} = \sqrt{h_{1_0} - h_{2_0}} //$$

$$f_2(x,u) = 0 \rightarrow \sqrt{h_1 - h_2} - \sqrt{h_2 - h_3} = 0 \quad \sqrt{h_{1_0} - h_{2_0}} = \sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}} \quad (\text{II})$$

$$f_3(x,u) = 0 \rightarrow \sqrt{h_2 - h_3} - \sqrt{|h_3|} + u_2 = 0 \rightarrow \sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}} - \sqrt{|h_{3_0}|} = -v_{2_0}$$

# Aufgabe 8.1

(ii) Ruhelagen:  $u_0, x_0 \rightarrow$  konstanten.

$$f(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} u_{10} - \sqrt{h_{10} - h_{20}} \\ \sqrt{h_{10} - h_{20}} - \sqrt{h_{20} - h_{30}} \\ \sqrt{h_{20} - h_{30}} - \sqrt{h_{30}} + u_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0, u_0) \\ f_2(x_0, u_0) \\ f_3(x_0, u_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$f_1 + f_2 + f_3 \rightarrow -\sqrt{h_{30}} + u_{10} + u_{20} = 0$$

$$h_{30} = (u_{10} + u_{20})^2 //$$

$$f_1 + f_2 \rightarrow -\sqrt{h_{20} - h_{30}} + u_{10} = 0$$

$$h_{20} = 2u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2 //$$

$$f_2 = \sqrt{h_{10} - h_{20}} + u_{10} = 0 \rightarrow$$

$$h_{10} = 3u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2 //$$

# Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \\ y = C \Delta x + D \Delta u \end{cases}$$

# Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung: Ruhelagen,  $h_1 \geq h_2 \geq h_3$ ,  $u_1, u_2 \geq 0$   $g_{e1} = g_{e2}$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \Rightarrow x_1 = h_1, x_2 = h_2, x_3 = h_3$$

i)  $y = x$

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{x_1 - x_2} \\ \sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2 - x_3} \\ \sqrt{x_2 - x_3} - \sqrt{x_3} + u_2 \end{pmatrix}$$

ii)  $x_0 = [x_{10} \ x_{20} \ x_{30}]$ ,  $(u_{10}, u_{20})$  (Ruhelagen):

$$\begin{cases} x_{10} = 3u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2 \\ x_{20} = 2u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2 \\ x_{30} = (u_{10} + u_{20})^2 \end{cases}$$

# Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung:

$$\Delta x(t_{AB}) = x_{AB} - x_0$$

↳ Anfangsbedingung

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \Delta u$$
$$\Delta y = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \Delta x + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \Delta u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

# Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial (u_1 - (x_1 - x_2)^{1/2})}{\partial x_1} = - \frac{(x_1 - x_2)^{-1/2}}{2}$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_{01}, u_0} = - \frac{1}{2} \left( (3u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2) - (2u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2) \right) = - \frac{1}{2u_{10}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial (u_1 - (x_1 - x_2)^{1/2})}{\partial x_2} = \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^{-1/2} \Rightarrow \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_{01}, u_0} = \frac{1}{2u_{10}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

# Aufgabe 8.1

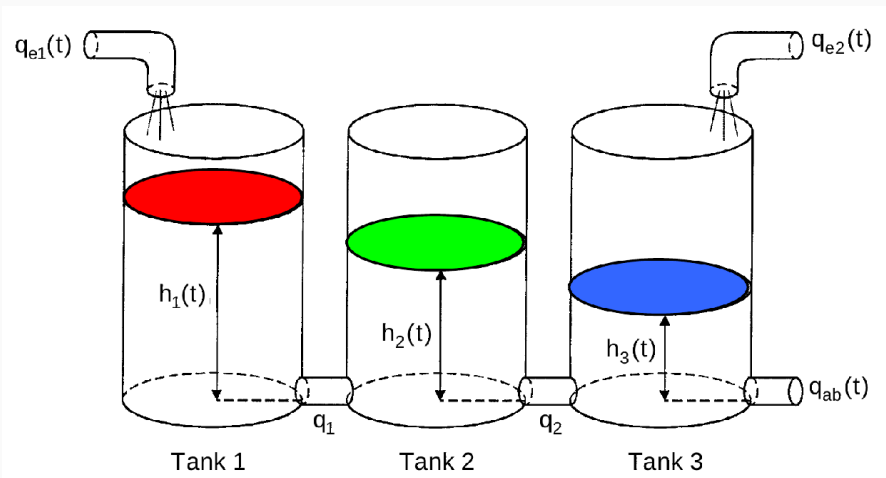
(iii) Linearisierung:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}u_{10} & \frac{1}{2}u_{10} & 0 \\ \frac{1}{2}u_{10} & -\frac{1}{2}u_{10} & \frac{1}{2}u_{10} \\ 0 & \frac{1}{2}u_{10} & \frac{-2u_{10} + u_{20}}{2u_{10}(u_{10} + u_{20})} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = id, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Aufgabe 8.2

Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern.  $F$  bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit)  $q_{e1}$  bzw.  $q_{e2}$ , aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz  $q_{ab}$  ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände  $h_1, h_2, h_3$  (das sind also die Ausgänge).



Gesetz von Torricelli:

$$q_{ab} = \mu \sqrt{2g} \sqrt{h_3},$$

$$q_i = \mu \sqrt{2g} \operatorname{sign}(h_i - h_{i+1}) \sqrt{|h_i - h_{i+1}|},$$

sowie  $g, \mu, F > 0, q_{ei} \geq 0, h_i \geq 0$ .

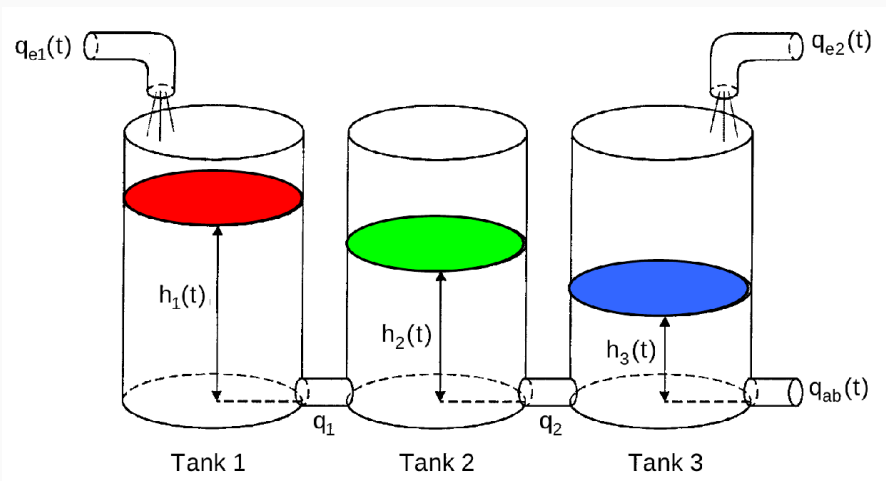


## Aufgabe 8.2

(i) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme  $h_1 > h_2 > h_3 > 0$  in jeder Ruhelage durch den Eingang  $\Delta q_{e1}$  allein steuerbar ist. Hinweis: Linearisiert wird im Punkt  $u = (q_{e1}, q_{e2})$  mit zugehörigem  $h$  wie bisher. Durch den Eingang  $\Delta q_{e1}$  allein steuerbar zu sein bedeutet, daß der zweite Eingang *der bereits vorliegenden Linearisierung* nicht benutzt wird, also stets den Wert 0 haben soll. Überlegen Sie sich, wie die Anordnung reagiert, wenn Sie sich zunächst in einer Ruhelage befindet und Sie dann den Durchsatz  $q_{e1}$  erhöhen bzw. verringern. Kann es z.B. vorkommen, daß sich  $h_1$  und  $h_3$  verringern, während sich  $h_2$  vergrößert? Wie paßt das zur Steuerbarkeit?

# Aufgabe 8.2

**Definition 3.5:** Ein dynamisches System  $(A, b)$  heißt **steuerbar**, wenn der Zustandsvektor  $x(t)$  durch eine geeignete Steuerfunktion  $u(t)$  in einer endlichen Zeitspanne  $[t_0, t_e]$  aus jedem Anfangszustand  $x(t_0)$  in jeden gewünschten Endzustand  $x(t_e)$  überführt werden kann.  
(Auch: vollständig z-steuerbar.)



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} & 0 \\ \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{1}{u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1} + u_{0,2}} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{1}{2u_{0,1}(u_{0,1} + u_{0,2})} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = I_{3 \times 3}, \quad D = 0_{3 \times 2}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit Ruhelage:  $u_0 = [u_{0,1} \quad u_{0,2}]$   
 $y_0 = [h_{e1} \quad h_{e2} \quad h_{e3}]$ .



## Steuerbarkeitskriterien

### Satz 3.2 (Steuerbarkeitskriterien)

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung  $n$  ist

a1) Kalman-Kriterium

dann und nur dann vollständig z-steuerbar, wenn für die  $(n \times n)$  Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_S$  gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang} [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = n \quad (3.37)$$

a2) Hautus-Kriterium

Überprüfung der einzelnen Eigenwerte auf Steuerbarkeit

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S^* = \text{Rang} [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{b}]_{\lambda=\lambda_i} = n \quad (3.38)$$

mit  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  den Eigenwerten von  $\mathbf{A}$ .

Der Rang der **Steuerbarkeitsmatrix** gibt die Anzahl der steuerbaren Zustandsgrößen an.

Man sagt dann auch, dass der Eigenwert  $\lambda_i$  nicht steuerbar ist !!

Ist die Bedingung nicht erfüllt, so kann die zugehörige Eigenbewegung nicht beeinflusst werden.



Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

## Aufgabe 8.2

$$(i) \quad Q_s = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}u_{10} & \frac{1}{2}u_{10}^2 \\ 0 & \frac{1}{2}u_{10} & -\frac{3}{4}u_{10}^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}u_{10}^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(Q_s) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \det(Q_s) = \frac{1}{2u_{10}} \cdot \frac{1}{4u_{10}^2} = \frac{1}{8u_{10}^3} \neq 0$$

Rang = 3, System steuerbar

, da Rang = n = 3.

## Aufgabe 8.2

(ii) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme  $h_1 > h_2 > h_3 > 0$  in jeder Ruhelage allein durch Messung des Ausgangs  $\Delta h_3$  beobachtbar ist.

—

$$C \neq \text{id}_{3 \times 3} \rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Aufgabe 8.2

## Definition 3.7 *Beobachtbarkeit*

Das dynamische System (3.1) heißt vollständig beobachtbar im Intervall  $[t_0, t_e]$ , wenn für gegebene  $t_0$  und  $t_e$  jeder Systemzustand  $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$  aus der Kenntnis der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  in  $[t_0, t_e]$  ermittelt werden kann.  $\square$



## Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit

### Duales System

Mit Hilfe der transponierten Matrizen bzw. Vektoren  $A^T, b^T, c$  eines Zustandsmodells  $(A, b, c^T)$  lässt sich das sogenannte **duale System** bilden:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}(t) = A^T \tilde{x}(t) + c\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = b^T \tilde{x}(t) \end{array}$$

Originalsystem

Duales System

**Satz 3.5** (Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit)

Ein zeitinvariantes System (3.1) ist vollständig zustandssteuerbar (beobachtbar), wenn sein duales System (3.51) vollständig beobachtbar (zustandssteuerbar) ist.



Ein Programm zur Überprüfung der Steuerbarkeit kann auch zur Überprüfung der Beobachtbarkeit eingesetzt werden.

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

## Aufgabe 8.2

(ii) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme  $h_1 > h_2 > h_3 > 0$  in jeder Ruhelage allein durch Messung des Ausgangs  $\Delta h_3$  beobachtbar ist.

$$y = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} = \text{id}_{3 \times 3} \cdot \Delta x$$

$$\hookrightarrow y = \Delta h_3 = \overset{=c}{[0 \ 0 \ 1]} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} + \cancel{D \cdot u} \quad \overset{D=0}{\cancel{D=0}}$$



# Aufgabe 8.2

(ii) Duale System:

$$\hat{A} = A^T$$
$$\hat{B} = C^T$$

$$\hat{Q}_S = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A} \hat{B} & \hat{A}^2 \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cancel{4U_{10}^2} \\ 0 & \cancel{2U_{10}} & \frac{4U_{10} + 3U_{20}}{4U_{10}^2(U_{10} + U_{20})} \\ 1 & \frac{2U_{10} + U_{20}}{2U_{10}(U_{10} + U_{20})} & \frac{5U_{10}^2 + 6U_{10}U_{20}}{4U_{10}^2(U_{10} + U_{20})} \end{pmatrix}$$

$$\det(\hat{Q}_S) \neq 0 \rightarrow \text{beobachtbar } \checkmark$$

## Aufgabe 8.2

(iii) Betrachten Sie hier die Linearisierung mit nur einem Eingang  $\Delta q_{e1}$  in der Ruhelage mit  $q_{e1} = q_{e2} = 1/2$  und geeigneten  $h_i$ .

Bestimmen Sie  $\Delta q_{e1}$  so, daß der Zustand  $\Delta h$  der Linearisierung in der Zeit 3 von 0 nach  $(-0.005, 0.005, -0.005)$  überführt wird. (Benutzen Sie ggf einen Rechner!)  $t_1$   $t_2$   $t_3$

$$x = [\Delta h_1 \quad \Delta h_2 \quad \Delta h_3]^T, \quad y = \Delta h_3, \quad u = \Delta u_1$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$C = (0 \quad 0 \quad 1), \quad D = 0$$

## Aufgabe 8.2

(iii) Differentialgleichung:

$$\Delta \dot{h}_1(t) = -\Delta h_1(t) + \Delta h_2(t) + \Delta u_1(t)$$

$$\Delta \dot{h}_2(t) = \Delta h_1(t) - 2\Delta h_2(t) + \Delta h_3(t)$$

$$\Delta \dot{h}_3(t) = \Delta h_2(t) - \frac{3\Delta h_3(t)}{2}$$

- Anfangsbedingungen ( $t = 0$ ):  $h_{0,1} = 0$ ,  $h_{0,2} = 0$ ,  $h_{0,3} = 0$
- Endbedingungen ( $t = 3$ ):  
 $\Delta h_1(t=3) = -0,005$   
 $\Delta h_2(t=3) = 0,005$   
 $\Delta h_3(t=3) = -0,005$

## Aufgabe 8.2

(iii) Ansatz:  $u_1$  stückweise konstant:

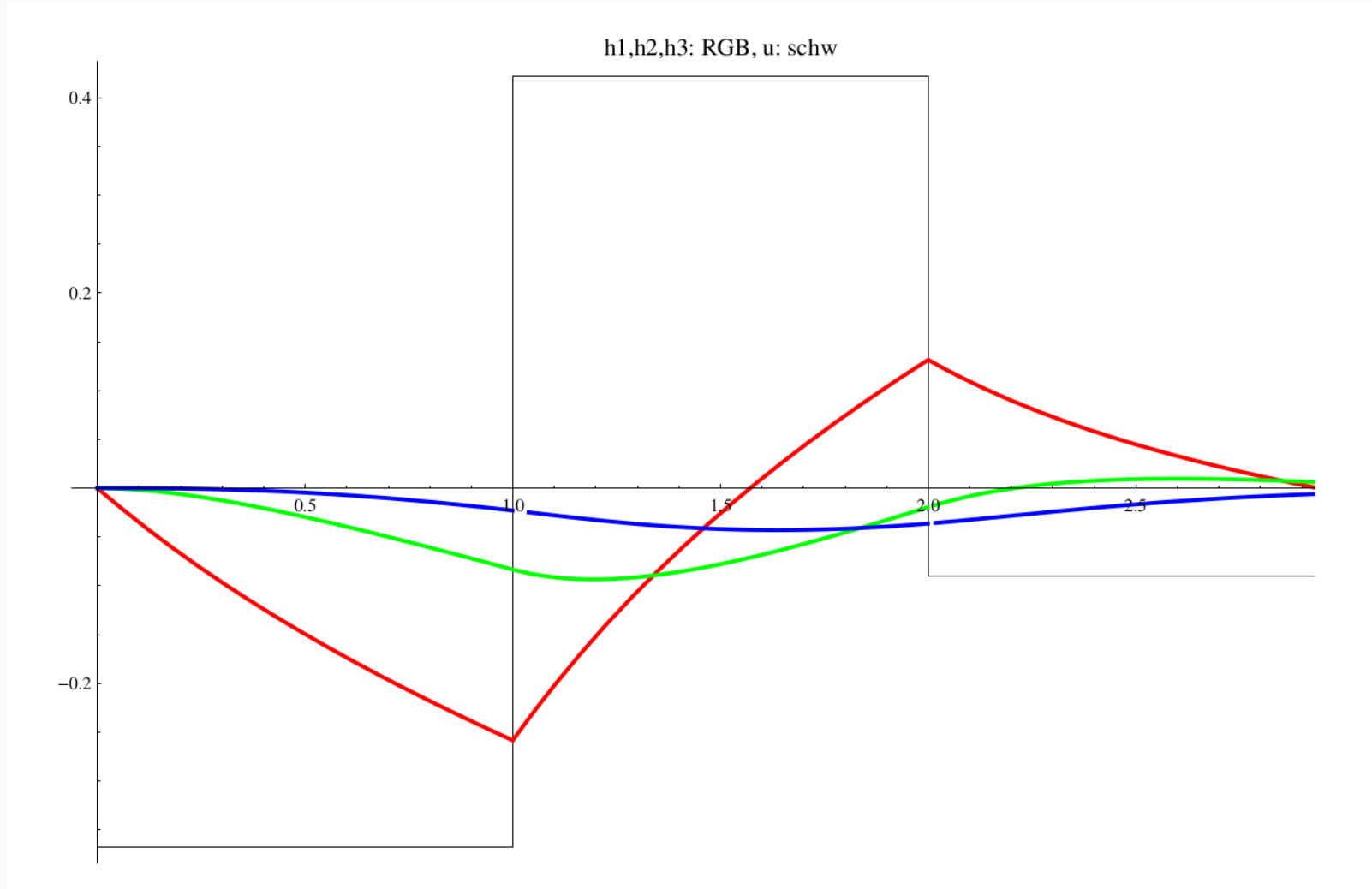
$$u_1(t) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq t < 1 \\ z_2, & 1 \leq t < 2 \\ z_3, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

• Berechnung von  $M$ :  $h(1)$ ,  $h(2)$  und  $h(3)$  nacheinander berechnen mit Lösungsformel lin. Ggf.-system zu lösen

$\Rightarrow M z = \text{Zielpunkt}$

Lösung:  $\{ z_1 \rightarrow -0,367969, z_2 \rightarrow 0,421585, z_3 \rightarrow 0,0893767 \}$

# Aufgabe 8.2



# Aufgabe 9.1

Betrachtet wird das Zustandsraumsystem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

mit den Werten für  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ , die in Aufgabe 8.2 berechnet wurden. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer Linearisierung in der Ruhelage mit  $q_{e1} = q_{e2} = 1/2$  und geeigneten  $h_i$ .

(i) Betrachten Sie die Linearisierung mit nur einem Eingang,  $\Delta q_{e1}$ , und bestimmen Sie eine lineare Zustandsrückführung derart, daß das char. Polynom des geschlossenen Regelkreises die Nullstellen  $-1$ ,  $-2$  und  $-3$  besitzt.



## Zustandsrückführung (3)

### Modell der Regelstrecke:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}[z(t) + u(t)]$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

### Durch Einsetzen des Regelgesetzes

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$$

### erhält man das Zustandsmodell des geschlossenen Kreises:

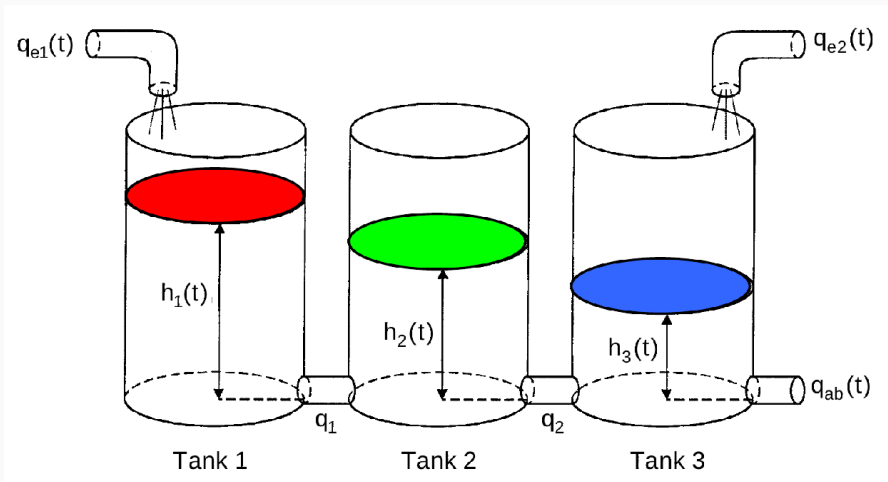
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T] \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}z(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

Systemmatrix  $\mathbf{A}_G$  des geschlossenen Kreises



# Aufgabe 9.1



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} & 0 \\ \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{1}{u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{2u_{0,1} + u_{0,2}}{2u_{0,1}(u_{0,1} + u_{0,2})} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \underline{\underline{[1 \ 0 \ 0]}}, \quad D = 0$$

$C = [0 \ 0 \ 1]$

mit Ruhelage:  $u_0 = [0,5 \ 0,5]$   
 $y_0 = [h_{0,1} \ h_{0,2} \ h_{0,3}]$ .



# Aufgabe 9.1

$$(i) \begin{cases} \Delta \dot{x} = (A - Bk) \Delta x & k = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \\ y = C \Delta x \end{cases} \quad \text{Ruhelage: } u_0 = [0.5 \quad 0.5]$$

$$\det(A - Bk - sI) \Rightarrow$$

$$(A - Bk - sI) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2 \quad k_3) - sI$$
$$= \begin{pmatrix} -1 - k_1 - s & 1 - k_2 & -k_3 \\ 1 & -2 - s & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 - s \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 9.1

$$(i) \det(A - Bk - s \text{id}) = (-1 - k_1 s)(-2 - s)(-\frac{3}{2} - s) - k_3 + (1 + k_1 s) + (\frac{3}{2} + s)(1 - k_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$s^3 + (\frac{9}{2} + k_1)s^2 + (\frac{9}{2} + \frac{7}{2}k_1 + k_2)s + (k_3 + \frac{3}{2}k_2 + 2k_1 + \frac{1}{2}) = 0$$

Gegebenes Polynom:  $(1+s)(2+s)(3+s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2k_1 + \frac{3k_2}{2} + k_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2} + \frac{7}{2}k_1 + k_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow k = \begin{bmatrix} 3/2 & 5/4 & 5/8 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2} + k_1 = 6 \end{cases}$$

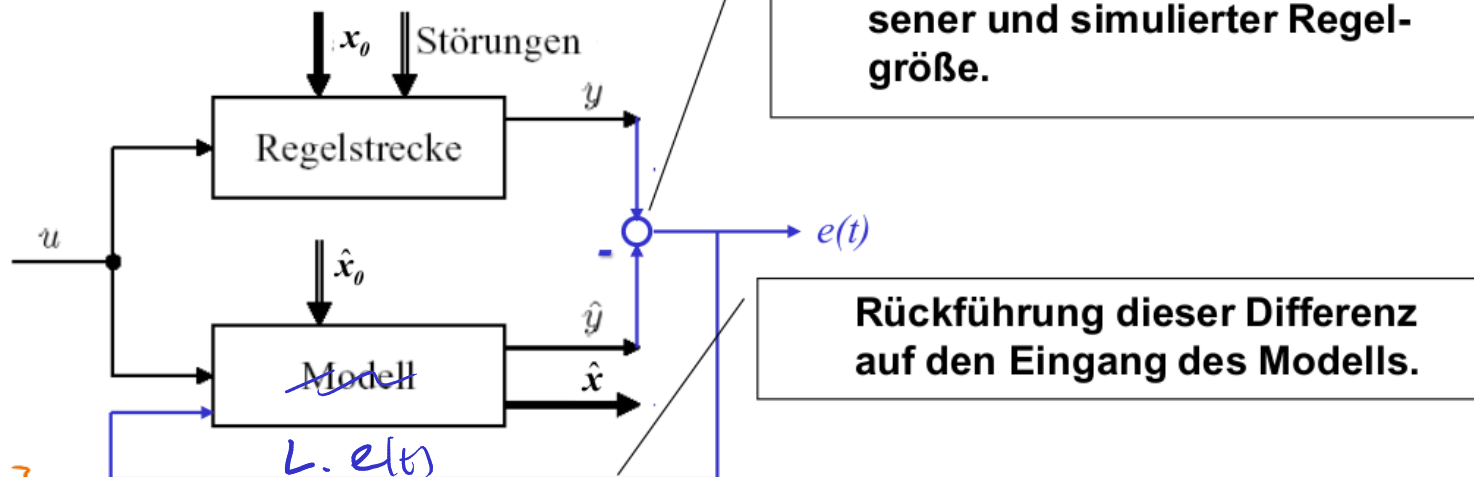
# Aufgabe 9.1

(ii) Betrachten Sie die Linearisierung mit nur einem Ausgang,  $\Delta h_3$ , und bestimmen Sie einen Beobachter, der  $-5$  als dreifachen Eigenwert besitzt.

### Grundidee des Beobachters (2)

Gemessene Regelgröße  $y(t)$  wird bisher nur zur Rekonstruktion des Anfangswertes verwendet.

Idee von Luenberger 1964:



# Aufgabe 9.1

(ii)  $C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $A^T, C^T, L^T$  anstelle von  $A, B, k$ :

Sollpolynom:  $(s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125$

$$L^T = [l_1, l_2, l_3] \quad C^T L^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{A} - \hat{B} \hat{k}) = (A^T - C^T L^T) \rightarrow \det(A^T - C^T L^T)$$

$$\det(A^T - C^T L^T - sI) = \det \begin{bmatrix} -1-s & 1 & 0 \\ 1 & -2-s & 1 \\ -l_1 & 1-l_2 & -\frac{3}{2}l_3-s \end{bmatrix} = 0$$

# Aufgabe 9.1

$$(ii) \quad s^3 + \frac{(9/2 + l_3)s^2}{\quad} + \frac{(9/2 + l_2 + 3l_3)s}{\quad} + \frac{(1/2 + l_1 + l_2 + l_3)}{\quad} = 0$$

geg. Poly.  $s^3 + 15s^2 + 75s + 125$

$$\begin{cases} 9/2 + l_3 = 15 \\ 9/2 + l_2 + 3l_3 = 75 \\ l_2 + l_1 + l_2 + l_3 = 125 \end{cases} \rightarrow \underline{L}^T = [75, 39, 2/2] \quad \checkmark$$

# Aufgabe 9.1

(iii) Verifizieren Sie numerisch mit Software Ihrer Wahl, daß der Beobachter aus (ii) die Zustände  $\Delta h_1$  und  $\Delta h_2$  der Linearisierung tatsächlich beobachtet. Wählen Sie dazu  $\Delta u_1(t) = t/10$ ,  $\Delta u_2(t) = 0$ ,  $\Delta h(0) = (-0.1, 0.2, 0.1)$  und  $\Delta \hat{h}(0) = (0, 0, 0)$ . ( $\Delta \hat{h}$  ist der Beobachterzustand.)

# Aufgabe 9.1

(iii) Eingangssignal =  $u(t) = t/10$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta x}_1(t) &= t/10 - \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ \dot{\Delta x}_2 &= \Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta x_3 \\ \dot{\Delta x}_3 &= \Delta x_2 - \frac{3\Delta x_3}{2} \end{aligned} \right\} \text{lin. System}$$

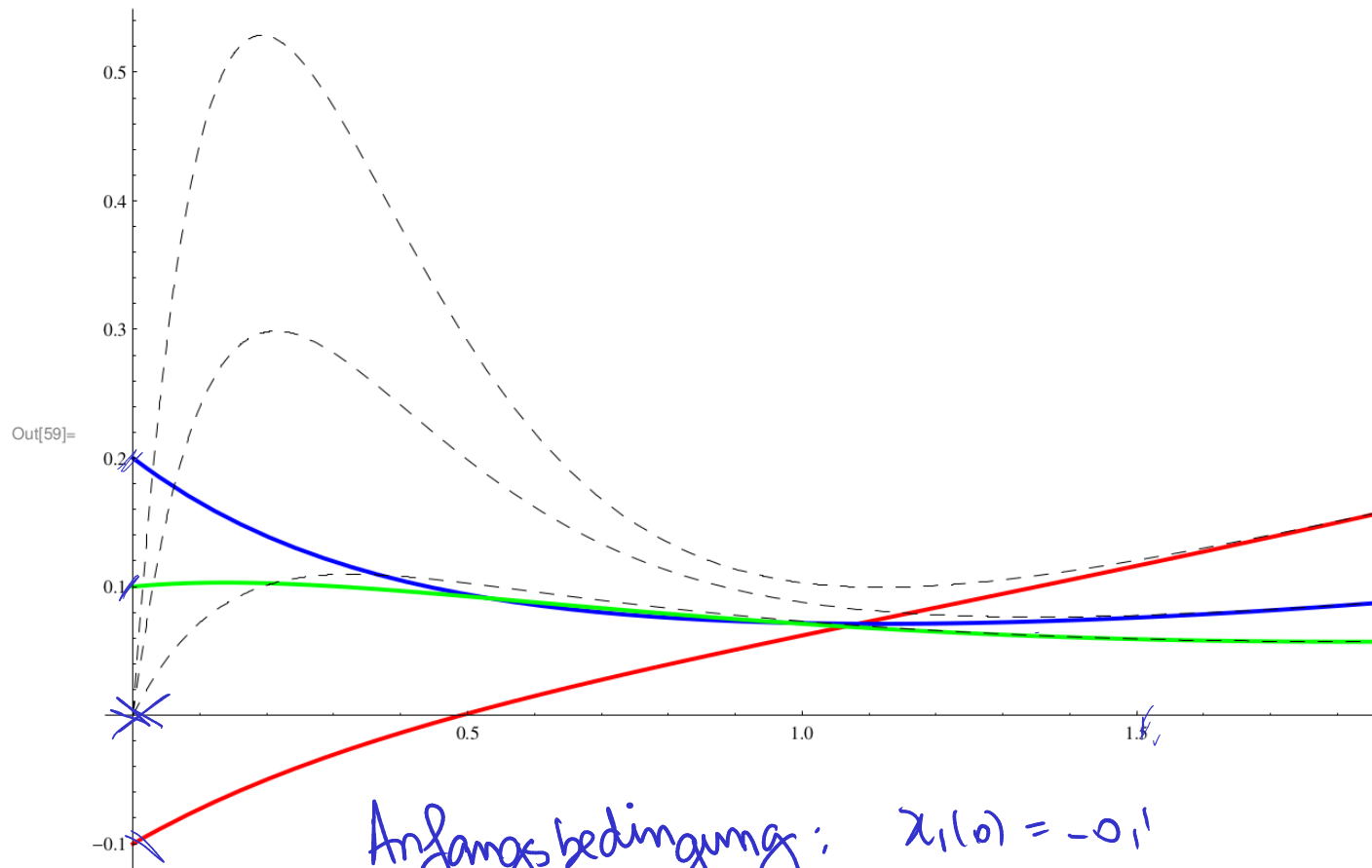
Beobachter:  $\uparrow$  Kopie des Systems Messung

Rückführungsteil  $\leftarrow$

$$\begin{aligned} \dot{\Delta \hat{x}}_1 &= \frac{t}{10} - \Delta \hat{x}_1 + \Delta \hat{x}_2 + 75(\Delta x_3 - \Delta \hat{x}_3) \\ \dot{\Delta \hat{x}}_2 &= \Delta \hat{x}_1 - 2\Delta \hat{x}_2 + \Delta \hat{x}_3 + 39(\Delta x_3 - \Delta \hat{x}_3) \\ \dot{\Delta \hat{x}}_3 &= \Delta \hat{x}_2 - \frac{3\Delta \hat{x}_3}{2} + \frac{21}{2}(\Delta x_3 - \Delta \hat{x}_3) \end{aligned}$$



# Aufgabe 9.1



Anfangsbedingung:

$$\lambda_1(0) = -0,1$$

$$\lambda_2(0) = 0,2$$

$$\lambda_3(0) = 0,1$$

$$\hat{\lambda}_1(0) = 0$$

$$\hat{\lambda}_2(0) = 0$$

$$\hat{\lambda}_3(0) = 0$$