

Regelungstechnik

8. Übung

Victor Cheidde Chaim

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h., prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$

$$\Phi(0) = I$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).

(ii) $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha + 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).

(iv) Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).

Aufgabe 7.3

$$(i) \phi(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} ze^{-t/2} + e^t & -ze^{-t/2} + ze^t \\ -e^{-t/2} + e^t & e^{-t/2} + ze^t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Überprüfung: $\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t)$, $\phi(0) = id$

$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \rightarrow e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

$e^0 = 1$

$$\phi(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot e^0 + e^0 & -ze^0 + ze^0 \\ -e^0 + e^0 & e^0 + ze^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 & -z \cdot 1 + z \cdot 1 \\ -1 + 1 & 1 + z \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id$$

Aufgabe 7.3

(i) $\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t)$

$$\phi(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + e^t & -2e^{-t/2} + 2e^t \\ -e^{-t/2} + e^t & e^{-t/2} + 2e^t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \frac{d}{dt} \text{Mp}(AA) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(2e^{-t/2} + e^t) & \frac{d}{dt}(-2e^{-t/2} + 2e^t) \\ \frac{d}{dt}(-e^{-t/2} + e^t) & \frac{d}{dt}(e^{-t/2} + 2e^t) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 2e^{-t/2} + 1 \cdot e^t & -\frac{1}{2}(-2)e^{-t/2} + 2 \cdot 1 \cdot e^t \\ (-\frac{1}{2}) \cdot (-1)e^{-t/2} + 1 \cdot e^t & \frac{1}{2}e^{-t/2} + 2 \cdot 1 \cdot e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^{-t/2} + e^t & e^{-t/2} + 2e^t \\ \frac{1}{2}e^{-t/2} + e^t & -\frac{1}{2}e^{-t/2} + 2e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

(i) $\dot{\phi}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} + e^t & -\frac{t}{2} + 2e^t \\ \frac{e^{-t/2}}{2} + e^t & -\frac{e^{-t/2}}{2} + 2e^t \end{pmatrix} \phi(t)$

A. $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + e^t & -2e^{-t/2} + 2e^t \\ -e^{-t/2} + e^t & e^{-t/2} + 2e^t \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} + e^t & -\frac{t}{2} + 2e^t \\ \frac{1}{2}(2e^{-t/2} + e^t) + \frac{1}{2}(-e^{-t/2} + e^t) & \frac{1}{2}(-2e^{-t/2} + 2e^t) + \frac{1}{2}(e^{-t/2} + 2e^t) \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} + e^t & -\frac{t}{2} + 2e^t \\ e^{-t/2} + e^t & -\frac{1}{2}e^{-t/2} + 2e^t \end{pmatrix} = \dot{\phi}(t) \quad (\checkmark)$

Aufgabe 7.3

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \phi(t) = \underline{z}$$

$$\text{EW von } A: \quad \det(A - \lambda \text{id}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$
$$= \lambda^2 + \lambda \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$$

$$\lambda^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!} \quad = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -1}$$

$$A = (A - \lambda \text{id}) + \lambda \text{id}$$

Aufgabe 7.3

$$(ii) \quad A = (A - \lambda id) + \lambda id$$

$$\exp(At) = \exp(((A - \lambda id) + \lambda id)t) = \overbrace{\exp((A - \lambda id)t)}^{(I)} \cdot \overbrace{\exp(\lambda id t)}^{(II)}$$

$$I): \quad \exp((A - \lambda id)t) = \exp \begin{pmatrix} (-\frac{3}{2} - (-1))t & \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t & (-\frac{1}{2} - (-1))t \end{pmatrix} =$$

$$= \exp \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t & \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t & \frac{1}{2}t \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{matrix} (A - \lambda id) \\ \text{Ew von} \end{matrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{nilpotent}}}$$

$$A^k = 0, \quad k \geq c, \quad c \in \mathbb{N}$$

$$\exp((A - \lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda id)^n t^n}{n!}$$

Aufgabe 7.3

(ii) $(A - \lambda \text{id})$ ist nilpotent, $(A - \lambda \text{id})^k = 0$, $k \geq c$, $c = ?$

$$(A - \lambda \text{id})^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda \text{id})^k = 0, \quad k \geq 2.$$

$$\exp((A - \lambda \text{id})t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda \text{id})^n \cdot t^n}{n!} = \text{id} + (A - \lambda \text{id})t + \frac{(A - \lambda \text{id})^2 \cdot t^2}{2} + \dots \rightarrow 0$$

$$\exp((A - \lambda \text{id})t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 - t/2 & 1/2 \\ -t/2 & 1 + t/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{IV: } \exp(\lambda \text{id} \cdot t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \text{id})^n \cdot t^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \underline{\underline{e^{\lambda t} \cdot \text{id}}}$$

Diagonalmatrix

Aufgabe 7.3

$$(ii) \quad \phi(t) = \exp(At) = \exp((A - \lambda \text{id})t) \cdot \exp(\lambda \text{id} t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1 + t/2 \end{pmatrix} \cdot \text{id} e^{-t} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 - t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1 + t/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Probe: } \phi(0) = e^0 \begin{pmatrix} 1 - 0/2 & 0/2 \\ -0/2 & 1 + 0/2 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) \rightarrow \dot{\phi}(t) = (-1) \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 - t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1 + t/2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} t/2 + 3/2 & 1/2 - t/2 \\ t/2 - 1/2 & -t/2 - 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

~~(iii)~~

$$\dot{\phi}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} t/2 + 3/2 & 1/2 - t/2 \\ t/2 - 1/2 & -t/2 - 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot \phi(t) = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1 + t/2 \end{pmatrix} e^{-t} = e^{-t} \begin{pmatrix} t/2 + 3/2 & 1/2 - t/2 \\ t/2 - 1/2 & -t/2 - 1/2 \end{pmatrix}$$

$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t)$

 (✓)

Aufgabe 7.3

$$(iii) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{EW von } A: \det(A - \lambda \text{id}) = 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^3 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 1}$$

$$\phi(t) = \exp(At) = \underbrace{\exp((A - \lambda \text{id})t)}_{(I)} \exp(\lambda \text{id}t) \xrightarrow{\text{nilpotent}} \underbrace{e^{\lambda t} \text{id}}_{(II)}$$

Aufgabe 7.3

(iii) I): $\exp((A - \lambda \text{id})t)$

EW: $(A - \lambda \text{id}) \mid P \rightarrow \det(A - \lambda \text{id} - p \cdot \text{id}) = 0, \lambda = 1$

$$\det \begin{pmatrix} 1-1-p & 2 & 0 \\ 0 & 1-1-p & 2 \\ 0 & 0 & 1-1-p \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -p & 2 & 0 \\ 0 & -p & 2 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = 0$$

$P^3 = 0 \rightarrow$ EW von $(A - \lambda \text{id}) = 0 \rightarrow (A - \lambda \text{id})$ ist nilpotent
 $(A - \lambda \text{id})^k = 0, k \geq 3$

Aufgabe 7.3

$$(iii) \quad (A - \lambda id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda id)^3 = (A - \lambda id)^2 (A - \lambda id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - \lambda id)^k = 0, \quad k \geq 3.$$

$$\exp((A - \lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda id)^n t^n}{n!} = id + (A - \lambda id)t + (A - \lambda id)^2 \frac{t^2}{2} + \cancel{(A - \lambda id)^3 \frac{t^3}{6}} + \dots$$

$$= id + (A - \lambda id)t + (A - \lambda id)^2 \frac{t^2}{2}$$

Aufgabe 7.3

(iii)

$$\exp((A - \lambda \text{id})t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$\exp(\lambda \text{id}) = e^{\lambda t} \cdot \text{id} = e^t \cdot \text{id} //$$

$$\exp(At) = \exp((A - \lambda \text{id})t) \exp(\lambda \text{id}t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 7.3

$$(iii) \quad \phi(0) = e^0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0^2 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = id \quad (\checkmark)$$

$$\phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\phi}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4t \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi(t) = A\phi(t) \quad (\checkmark)$$

Aufgabe 7.3

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A_{11} (circled in green), A_{12} (circled in red), A_{22} (circled in orange)

$\dot{\phi} = A \cdot \phi \rightarrow \dot{\phi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}$

\leftarrow \hookrightarrow EW $\neq 0$ und haben verschiedene Werte

1. A_{11} : $\phi_{11} = \exp(A_{11} \cdot t) = e^t$ (Skalar)

2. A_{22} : $\phi_{22} = \exp(A_{22} \cdot t) \Rightarrow$ EW: $\det(A_{22} - \lambda \text{id}) = 0$

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = 2} \rightarrow \exp(A_{22} \cdot t) = \exp((A_{22} - \lambda \text{id})t) \exp(\lambda \text{id} \cdot t) = e^{2t} \cdot \text{id}$

Aufgabe 7.3

(iv) $\exp((A_{22} - \lambda \text{id})t)$ ^{\Rightarrow nilpotent} $\Rightarrow \det(A_{22} - \lambda \text{id} - p \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 0-p & 2 \\ 0 & 0-p \end{pmatrix} = 0$ ^{EW:} $\Rightarrow p_{112} = 0$ ^{nilpotent}

$(A_{22} - \lambda \text{id})^k = 0, \quad k \geq c :$

$(A_{22} - \lambda \text{id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c=2$

$\exp((A_{22} - \lambda \text{id})t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (A_{22} - \lambda \text{id})^n}{n!} = \text{id} + (A_{22} - \lambda \text{id})t + \frac{(A_{22} - \lambda \text{id})^2 t^2}{2} + \dots$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\exp(A_{22}t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} //$

Aufgabe 7.3

(iv) ϕ_{12} : $\dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11} & \dot{\phi}_{12} \\ 0 & \dot{\phi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\dot{\phi}_{12} = A_{11} \cdot \phi_{12} + A_{12} \cdot \phi_{22} = \phi_{12} + (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$= \phi_{12} + (2 \quad 4t+1) e^{2t}$$

$$\dot{\phi}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \phi_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_{12} + \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 4te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2e^{2t} \\ \dot{x}_2 = x_2 + (e^{2t} + 4te^{2t}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \int_0^t e^{-(t-z)} \cdot 2e^{2z} dz \\ x_2(t) = \int_0^t e^{-(t-z)} \cdot (e^{2z} + 4ze^{2z}) dz \end{cases}$$

* wir beenden diese Aufgabe im nächsten Seminar.