

Regelungstechnik

7. Übung

Victor Cheidde Chaim

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik



Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der **Wurzelort** ist der geometrische Ort der Lösungen (**Wurzeln**) der **charakteristischen** Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0$$

des **geschlossenen** Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die **Wurzelortskurve (WOK)** stellt die Abhängigkeit der **Wurzelorte** von einem **Parameter** (vielfach der Verstärkung K_0) des **offenen** Regelkreises dar.

$$1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0$$



Charakteristisches Polynom des **geschlossenen** Regelkreises:

$$C(s) = N_0(s) + Z_0(s)$$



Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

Aufgabe 7.1

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion G ,

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s^2+4s+13)} \cdot \begin{cases} G_0(s) = G(s)R(s) \\ R(s) = K \end{cases}$$

Wir betrachten die Wurzelortskurve unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h., eines P-Reglers mit positiver Verstärkung).

- (i) Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte der Wurzelortskurve. Nutzen Sie dazu die Regeln aus dem Skript und die entsprechenden Zusatzfolien zur Übung.
- (ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞ , Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

Aufgabe 7.1

(i) Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte der Wurzelortskurve.

10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	Allgemein gilt am Verzweigungspunkt a : $\frac{dG_0(s)}{ds} \Big _{s=a} = 0$ Für $a \neq p_i$ und $a \neq n_i$ gilt damit: a) reelle Pole und Nullstellen $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{a - n_i}$
----	--	---

$$G_0(s) = \frac{k}{(1+s) \cdot (s+3) \cdot (s^2+4s+13)}$$

$$\text{Pole: } (1+s)(3+s)(s^2+4s+13) = 0$$

$$\begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -3 \end{cases}$$

$$p_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$\begin{cases} p_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i \end{cases}$$

4 Pole: $n = 4$

0 NS: $m = 0$

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞ , Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$n - m$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n - m$ Asymptoten.
---	--------------------------------	---

$$n = 4 \text{ (Anzahl Pole)}$$

$$m = 0 \text{ (Anzahl NS)}$$

$$n - m = 4 - 0 = 4 \rightarrow 4 \text{ Äste} \rightarrow \infty.$$

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞ , Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

$$p_1 = -1, p_2 = -3, p_3 = -2 + 3i, p_4 = -2 - 3i.$$

8	Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt σ_w)	Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse. $\sigma_w = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m n_i}{n - m} \quad \text{für } n - m \geq 2$
---	---	--

$$\sigma_w = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m n_i}{n - m} = \frac{(-1) + (-3) + (-2 + 3i) + (-2 - 3i)}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\boxed{\sigma_w = -2}$$

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞ , Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

7	Winkel der Asymptoten	Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus $\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[\varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n-m.$
---	-----------------------	--

$$k = 1, 2, 3, 4$$

$$n-m = 4$$

$$\varphi_1 = \frac{(2 \cdot 1 - 1)\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_2 = \frac{(2 \cdot 2 - 1)\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi_3 = \frac{(2 \cdot 3 - 1)\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

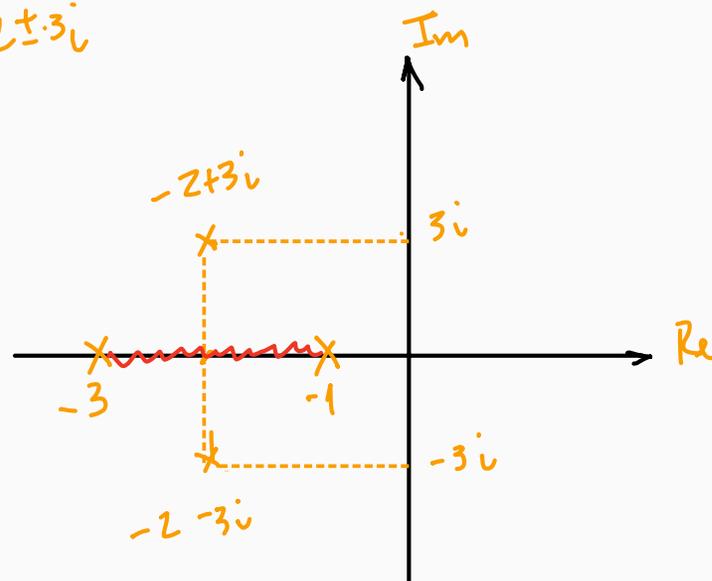
$$\varphi_4 = \frac{(2 \cdot 4 - 1)\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞ , Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen <u>rechter</u> Seite die Summe von Polen und Nullstellen <u>ungerade</u> [gerade] ² ist, ist ein Wurzelort.
---	---------------------------	--

$$p_1 = -1, p_2 = -3, p_{3,4} = -2 \pm 3i$$



Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞ , Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

— WOK

$$p_1 = -1, p_2 = -3, p_{3,4} = -2 \pm 3i$$

$$\sigma_w = -2$$

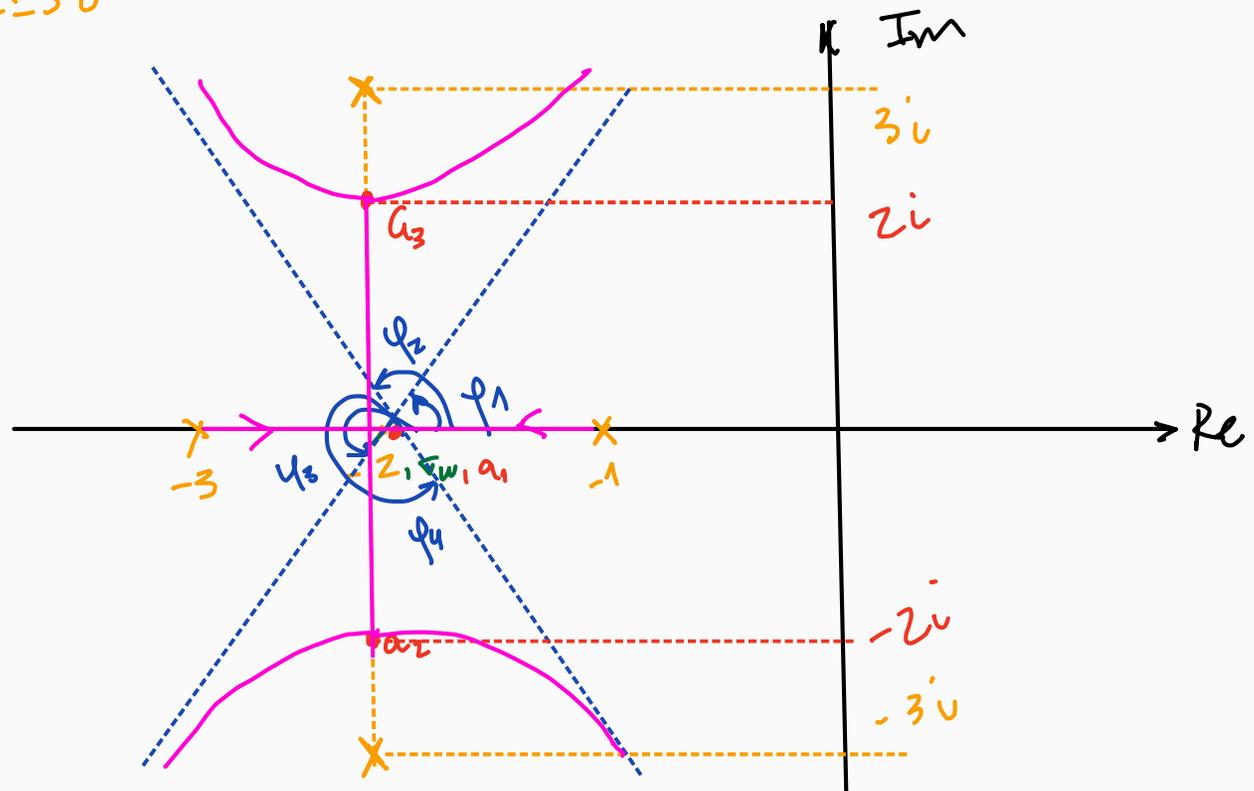
$$a_1 = -2$$

$$a_2 = -2 - 2i$$

$$a_3 = -2 + 2i$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}$$

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{4} \quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$$



Aufgabe 7.2

Gegeben seien die Matrizen A und B . Berechnen Sie $\exp(At)$, $\exp(Bt)$ und $\exp((A+B)t)$. Gilt hier $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

nilpotent: $(Ew=0)$
 $k \in \mathbb{R}$
 $A^m = 0, m \geq k$

Aufgabe 7.2

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ev: $\det(A - \lambda \text{id}) = 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = 0}$
 \hookrightarrow nilpotent!

$$\exp(At) = \frac{(A \cdot t)^0}{0!} + \frac{(A \cdot t)^1}{1!} + \frac{(A \cdot t)^2}{2!} + \dots = \text{id} + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{matrix} m \\ A = 0 \\ m \geq 2 \end{matrix}}$$

Aufgabe 7.2

$$\exp(At) = \text{id} + A \cdot t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\exp(Bt) \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Ew}(B): \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad B \text{ ist nicht nilpotent}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^2 = B$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = B \cdot B = B^2 = B \rightarrow \boxed{B^n = B, \quad n \geq 1}$$

Aufgabe 7.2

$$B^m = B, \quad \gamma \geq 1$$

$$\exp(Bt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Bt)^n}{n!} = \text{id} + Bt + \frac{B^2 t^2}{2!} + \frac{B^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$= \text{id} + B \cdot t + B \cdot \frac{t^2}{2!} + B \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= \text{id} + B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \frac{B \cdot t^0}{0!} - \frac{B \cdot t^0}{0!}$$

$$= \text{id} - \frac{Bt^0}{0!} + B \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_{= e^t} = \text{id} - B + B \cdot e^t$$

Aufgabe 7.2

$$\exp(Bt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

$$\exp(Bt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$\exp((A+B)t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ew}(A+B): \det((A+B) - \lambda \text{id}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

A+B ist nicht nilpotent

Aufgabe 7.2

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (A+B)$$

$$(A+B)^n = (A+B), \quad n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \exp((A+B)t) &= \text{id} - (A+B)t + (A+B)^2 \frac{t^2}{2!} - \dots = e^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} - \dots = e^t \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

$$\exp((A+B)t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \exp(Bt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(At) \exp(Bt) = \exp((A+B)t) ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn $AB = BA$, dann gilt

$$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$$

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h., prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$

$$\Phi(0) = I$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).

2. $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha + 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).

4. Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).



Berechnung der Transitionsmatrix (3)

3. Wenn die $n \times n$ Systemmatrix A n linear unabhängige Eigenvektoren hat, kann sie mit Hilfe der aus den n Eigenvektoren gebildeten Transformationsmatrix T auf Diagonalform transformiert werden:

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

Das transformierte homogene Zustandsmodell besteht aus n entkoppelten DGL der Form $\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t)$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A sind. Die zur Diagonalmatrix J gehörende Transitionsmatrix e^{Jt} hat die leicht berechenbare Form

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

$$A = TJT^{-1}$$



Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

Aufgabe 7.3

$$A = T^{-1} \Lambda T \Rightarrow A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A = \underbrace{(T^{-1} \Lambda T)}_{id} \underbrace{(T^{-1} \Lambda T)}_{id} \dots \underbrace{(T^{-1} \Lambda T)}_{id} = T^{-1} \Lambda^n T$$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = T^{-1} \left(\sum \frac{\Lambda^n t^n}{n!} \right) T$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

$$\exp(At) = T^{-1} \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^n t^n}{n!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum \frac{\lambda_2^n t^n}{n!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum \frac{\lambda_n^n t^n}{n!} \end{pmatrix} T = T^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{\exp(\Lambda t)} T$$

Aufgabe 7.3

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\text{EW}(A) \rightarrow \lambda_1 = 1$ $\left(A \text{ ist nicht nilpotent} \right)$
 $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$-\lambda(\frac{1}{2}-\lambda) - \frac{1}{2} = 0$$

$$A = T^{-1} \Lambda T$$

$$T = [v_1 \ v_2]$$

$$\lambda_1 \cdot (A - \lambda_1 \cdot \text{id}) v_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -v_{11} = -v_{12} \\ v_{11} = v_{12} \end{cases} \rightarrow \boxed{v_{11} = v_{12}} \xrightarrow{\substack{v_{11}=1 \\ -D}} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \cdot (A - \lambda_2 \cdot \text{id}) v_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{v_{21}}{2} = -v_{22} \\ v_{22}=1 \end{cases} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.3

$$\bar{T}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{T})} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(At) = T \left(\sum \frac{\Lambda^n t^n}{n!} \right) \bar{T}^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \bar{T}^{-1}$$

$$\phi(t) = \exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -t/2 & t & -t/2 & t \\ 2e+t & e & -2e+2e & e \end{pmatrix}$$