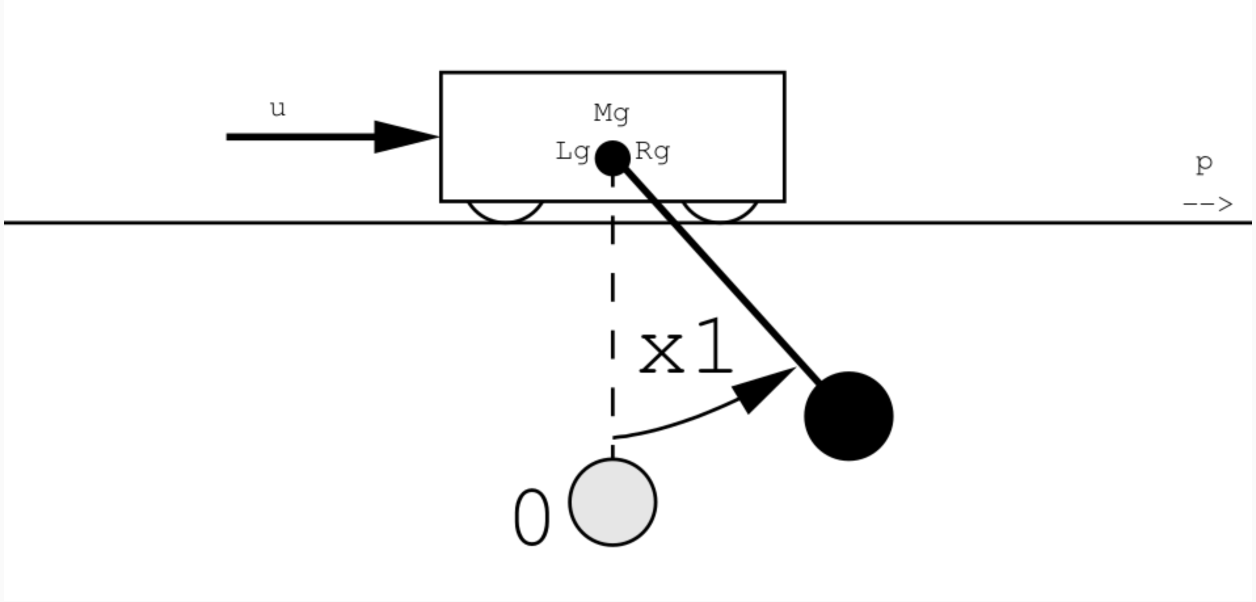
Aufgabe 9.2

Betrachtet werde ein auf einem Wagen drehbar befestigter Stab der Länge L; siehe Abbildung. Der Stab ist masselos, trägt an seinem Ende eine Punktemasse m, und bewegt sich in einer Ebene unter Einfluß der Fallbeschleunigung g und der Beschleunigung u des Wagens. Die Beschleunigung u des Wagens wird dabei als Eingang betrachtet; die Reibung im Gelenk des Stabes ist viskos mit Reibungskoeffizient ρ. Für die Parameter nehmen wir $L > 0$, $m > 0$, $g > 0$ und $\rho \geq 0$ an.

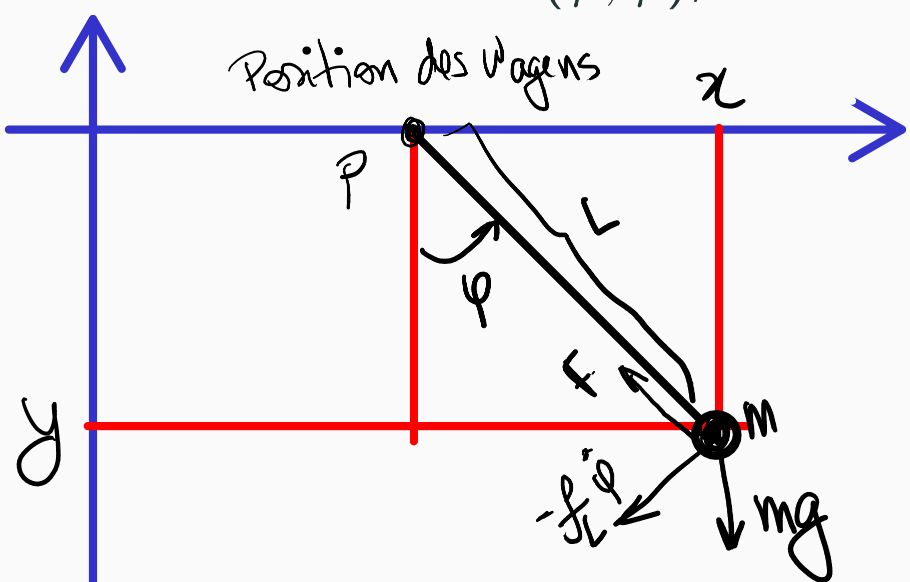


Aufgabe 9.2

(i) Modellieren Sie die Bewegung des Stabes in Zustandsform

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = g(x, u)$$

mit dem Zustand $x = (\varphi, \dot{\varphi})$, dem Ausgang φ und dem Eingang u.



Eigene Trägheit:

$$\dot{x} = \dot{p} + L\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$
$$\ddot{x} = \ddot{p} + L(-\sin(\varphi)(\dot{\varphi})^2 + \cos(\varphi)\ddot{\varphi})$$
$$\dot{y} = L\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$
$$\ddot{y} = L(\cos(\varphi)(\dot{\varphi})^2 + \sin(\varphi)\ddot{\varphi})$$

Geometrie: $x = p + L\sin(\varphi)$
$y = -L\cos(\varphi)$

Aufgabe 9.2

(i) • Moment im Gelenk: $-\rho\dot{\varphi}$ (Reibung im Gelenk)

Kraft auf m: $\frac{\rho}{L}\dot{\varphi}\,(-\cos(\varphi), -\sin(\varphi))$

• Stabkraft: $F\,(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$

• Gewichtskraft: $(0, -mg)$

→ Kraftgleichgewichte:

horizontal: $m\ddot{p} + mL\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - mL\sin(\varphi)(\dot{\varphi})^2 = -\frac{\rho}{L}\dot{\varphi}\cos(\varphi) - F\sin(\varphi)$ (1)

vertical: $mL\cos(\varphi)(\dot{\varphi})^2 + mL\sin(\varphi)\ddot{\varphi} = -\frac{\rho}{L}\dot{\varphi}\sin(\varphi) + F\cos(\varphi) - mg$ (2)

Gewichtete Addition beide Gleichungen: $\cos(\varphi)\cdot(1) + \sin(\varphi)\cdot(2)$:

(i) $\left(\text{"}c\text{"} = \cos(\varphi),\ \text{"}s\text{"} = \sin(\varphi)\right)$

$$m\ddot{p}c + mLc^2\ddot{\varphi} \cancel{- mLsc(\dot{\varphi})^2} \cancel{+ mLsc(\dot{\varphi})^2} + mLs^2\ddot{\varphi} =$$

$$= -\frac{f}{L}\dot{\varphi}c^2 \cancel{- Fsc} - \frac{f}{L}\dot{\varphi}s^2 \cancel{+ Fsc} - mgs$$

$$\Rightarrow m\ddot{p}\cos(\varphi) + mL\ddot{\varphi} = -\frac{f}{L}\dot{\varphi} - mg\sin(\varphi) \quad //$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\sin(\varphi) - \frac{f}{mL^2}\dot{\varphi} - \ddot{p}\frac{1}{L}\cos(\varphi)\,, \quad x_1 := \varphi,\ x_2 := \dot{\varphi},\ u := \ddot{p}\ :$$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{f}{mL^2}x_2 - u\frac{\cos(x_1)}{L} \\ y = x_1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Also: $g(x,u) = x_1$,

$$f(x,u) = \left(x_2,\ -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{f}{mL^2}x_2 - \frac{u}{L}\cos(x_1)\right) \quad //$$

(ii) Bestimmen Sie alle Ruhelagen (x, u).

Ruhelagen: $(x_0, u_0) \Rightarrow \dot{x} = 0$

$\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow g \sin(x_1) + u \cos(x_1) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\cos(x_1) = 0 \wedge x_1 \in \pi \mathbb{Z})}_{\text{unmöglich}} \vee (\cos(x_1) \neq 0 \wedge \tan(x_1) = -\frac{u}{g})$

$\Leftrightarrow \tan(x_1) = -u/g$ //

Ruhelage: $\{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \,/\, \tan(x_1) = -u/g\}$

Aufgabe 9.2

(ii) Speziell RL der Form $(x,0)$:

$(x,0)$ RL $\Longleftrightarrow$ $\sin(x_1) = 0$ $\Longleftrightarrow$ $x_1 \in \pi\mathbb{Z}$

Aufgabe 9.2

(iii) Linearisieren Sie das System in den Ruhelagen. Berechnen Sie also die Matrizen

$$A := D_1 f(x,u), B := D_2 f(x,u), C := D_1 g(x,u), D := D_2 g(x,u)$$

für alle in (ii) bestimmten Ruhelagen (x,u).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x_1) + \frac{u}{L}\sin(x_1) & -\frac{f}{mL^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L}\cos(x_1) \end{pmatrix}$$

$$C = (1, 0), \quad D = 0$$

Aufgabe 9.2

(iii) $A_{21} = -\frac{g}{L}\cos(x_1) + \frac{u}{L}\sin(x_1)$

$\sin(x_1) = -\frac{u}{g}\cos(x_1)$ (aus Teilaufgabe (ii))

$A_{21} = -\frac{1}{gL}(g^2+u^2)\cos(x_1)$ //

$x_1 \in \arctan\left(\frac{-u}{g}\right) + \pi\mathbb{Z}, \quad \cos(\arctan(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

Aufgabe 9.2

(iii) $$A_{21} = -\frac{g^2+u^2}{gL}\frac{\operatorname{sign}(\cos(x_1))}{\sqrt{1+(u/g)^2}} = -\frac{g^2+u^2}{L}\cdot\frac{\operatorname{sign}(\cos(x_1))}{\sqrt{g^2+u^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{g^2+u^2}}{L}\operatorname{sign}(\cos(x_1)) = -\frac{g}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2}\operatorname{sign}(\cos(x_1))$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2}\operatorname{sign}(\cos(x_1)) & -\frac{f}{mL^2} \end{pmatrix},$$

Aufgabe 9.2

(iv) Ermitteln Sie für jede der Ruhelagen, für welche Parameterwerte die entsprechende Linearisierung asymptotisch stabil ist, und für welche Parameterwerte die entsprechende Linearisierung BIBO-stabil ist.

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ g\frac{\operatorname{sign}(\cos(x_1))}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2} & s + \frac{f}{mL^2} \end{pmatrix}$$

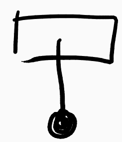
$$= s^2 + s\frac{f}{mL^2} + \operatorname{sign}(\cos(x_1))\frac{g}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2}$$

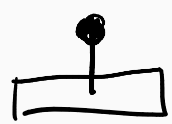
Aufgabe 9.2

(iv) Hurwitz-Kriterium für 2x2 Matrizen:

asy. stab. $\Leftrightarrow \rho > 0 \wedge \cos(x_1) > 0$

* Spezialfall $u = 0$:

$x_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$:  : $\cos(x_1) = 1$, asy. stab $\Leftrightarrow \rho > 0$

$x_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$:  : $\cos(x_1) = -1 \Rightarrow$ nicht asy. stab.

Aufgabe 9.2

(iv) BIBO - Stabilität:

1. Fall: $\cos(x_1) > 0 \wedge \rho > 0$: BIBO-stabil (da asy. stab.)

2. Fall: $\rho = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha = -\frac{g}{L}\sqrt{1+\left(u/g\right)^2}\,\mathrm{sign}(\cos(x_1)) \neq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ wobei } \beta = -\frac{1}{L}\cos(x_1) \neq 0, \text{ und } C = (1, 0)$$

Aufgabe 9.2

(iv) Zur Feststellung, ob BIBO-Stabilität vorliegt, wird die Impulsantwort berechnet: $g(t) = C \cdot e^{At} \cdot B$. Zunächst wir bestimmen e^{At}:

$$A^0 = id, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2k} = \begin{pmatrix} \alpha^k & \cdot \\ \cdot & \alpha^k \end{pmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^k \\ \alpha^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

1. Summe: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\alpha}\, t)^{2k}}{(2k)!}}_{= \cosh(\sqrt{\alpha}\, t)}$$

(iv) Z Summe: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{2k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{k} \\ \alpha^{k+1} & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\alpha})^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\alpha})^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sinh(\sqrt{\alpha}t)}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\alpha}t) & \sinh(\sqrt{\alpha}t)/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha}\cosh(\sqrt{\alpha}t) & \cosh(\sqrt{\alpha}t) \end{pmatrix} \Rightarrow g(t) = \frac{\sinh(\sqrt{\alpha}t)\,B}{\sqrt{\alpha}}$$

$\alpha > 0$: $\lim_{t\to\infty} \sinh(\sqrt{\alpha}t) = \infty$, $B/\sqrt{\alpha} \neq 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} |g(t)|\,dt \not< \infty$

$\Rightarrow$ nicht BIBO-stabil

Aufgabe 9.2

(iv) $\alpha < 0: \quad \sinh(\sqrt{\alpha}\, t) = j \sin(\sqrt{|\alpha|}\, t) \Rightarrow \int_0^\infty |g(t)|\, dt \not< \infty$

$\hookrightarrow$ nicht BIBO-stabil

3. Fall: $\quad \cos(x_1) < 0 \wedge \rho > 0$: Bleibt offen, aber prinzipiell auch über g bestimmbar.