Regelungstechnik

9. Übung

Victor Cheidde Chaim

20. März 2023

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h.,prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= A\Phi(t), \\ \Phi(0) &= I \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).

(ii) $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).

(iv) Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A_{11}, A_{12}, A_{22}

$$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) \Rightarrow \dot{\phi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}$$

1. ϕ_{11} skalar $\rightarrow$ $\phi_{11} = \exp(A_{11}) = e^{1t} = e^{t}$ //

2. ϕ_{22}: EW A_{22} $\Rightarrow$ $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ //

$(A_{22} - \lambda\, id) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotent (für $k \geq 2$) $\Rightarrow \exp(A_{22}t) = e^{2t}\left(id + t(A_{22} - id)\right)$

$$\phi_{22} = \exp(A_{22}t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 7.3

(iv) $\dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11}(t) & \dot{\phi}_{12}(t) \\ 0 & \dot{\phi}_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\dot{\phi}_{12} = A_{11}\phi_{12} + A_{12}\phi_{22} = \phi_{12} + [\underline{2e^{2t}}, \; e^{2t} + 4e^{2t}t]$$

$$\dot{\phi}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_1 + 2e^{2t}$$

$$\phi_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_1(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} \cdot 2e^{2\tau} d\tau = 2e^t \int_0^t e^{\tau} \cdot d\tau$$

$$= 2e^t e^{\tau}\Big|_0^t = 2e^t(e^t - 1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + e^{2t} + 4e^{2t} \cdot t$$

$$x_2(t) = \int_0 e^{(t-\tau)} \cdot (e^{2\tau} + 4e^{2\tau} \cdot \tau) d\tau = e^t \int_0^t e^{\tau} + 4e^{\tau} \cdot \tau d\tau$$

Aufgabe 7.3

(iv) $x_2(t) = e^{t}\int_0^t e^{\tau} + 4e^{\tau}\cdot\tau\, d\tau = e^{t}\left[e^{\tau} + 4(\tau-1)e^{\tau}\right]_0^t$

$= 3e^{t} - 3e^{2t} + 4e^{2t}\cdot t$ //

$$\phi = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}}^{=[x_1\ x_2]} = \begin{pmatrix} e^{t} & -2e^{t}+2e^{2t} & 3e^{t}-3e^{2t}+4e^{2t}\cdot t \\ 0 & e^{2t} & 2e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\dot{\phi} = A\phi}}$ ✓

Probe: $\phi(0) = id$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} e^{0}=1 & \cancel{-2e^{0}+2e^{0}}\ 0 & 3e^{0}\cancel{-3e^{0}+4e^{0}\cdot 0}\ 0 \\ 0 & e^{0}=1 & \cancel{2e^{0}\cdot 0}\ 0 \\ 0 & 0 & e^{0}=1 \end{pmatrix} = id$$ ✓

Aufgabe 8.1

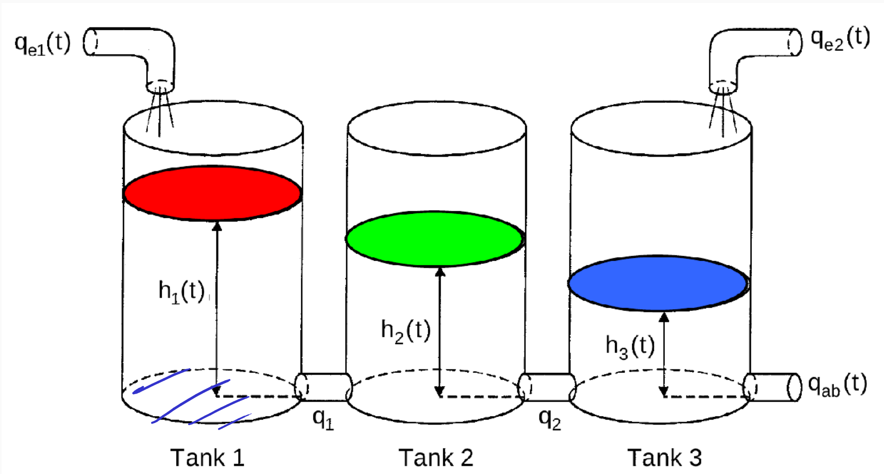
Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit) q_{e1} bzw. q_{e2}, aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz q_{ab} ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände h1, h2, h3 (das sind also die Ausgänge).

Gesetz von Torricelli:

$$\begin{aligned} q_{ab} &= \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3}, \\ q_i &= \mu\sqrt{2g}sign(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|}, \end{aligned}$$

sowie $g,\ \mu,\ F > 0,\ q_{ei} \geq 0,\ h_i \geq 0.$

Aufgabe 8.1



(i) Modellieren Sie die Strecke als Regelungssystem in Zustandsform mit den Zuständen h_1, h_2, h_3 und den Eingängen q_{e1}, q_{e2}.

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = g(x, u),$$

$$\dot{V} = \Delta Q \Rightarrow V = F \cdot h$$

$$\dot{V} = F \cdot \dot{h} \Rightarrow \dot{h} = \frac{\Delta Q}{F}$$

$$\dot{h}_1 = \frac{q_{e1} - q_1}{F} = \frac{\overset{=u_1}{q_{e1}} - \mu\sqrt{2g}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2)\sqrt{|h_1 - h_2|}}{F}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{q_1 - q_2}{F} = \sqrt{2g}\,\mu\,\frac{\left(\sqrt{|h_1 - h_2|}\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2) - \sqrt{|h_2 - h_3|}\cdot\mathrm{sign}(h_2 - h_3)\right)}{F}$$

Aufgabe 8.1

(i) Systemmodellierung: $\dot{h}_3 = \dfrac{q_2 - q_{ab} + \overbrace{q_{e2}}^{= u_2}}{F}$

$$\begin{cases} x = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \\ u = [q_{e1} \quad q_{e2}] \end{cases}$$

$$= \frac{\sqrt{2g}\,\mu\left(\sqrt{h_2 - h_3}\,\mathrm{sgn}(h_2 - h_3) - \sqrt{h_3}\right)}{F} + \frac{u_2}{F}$$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix}$$

$h_1 \geq 0,\ h_2 \geq 0,\ h_3 \geq 0,$

$u_1 \geq 0$ und $u_2 \geq 0$

$$g(x,u) \Rightarrow y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = g(x,u)$$

Aufgabe 8.1

(ii) Ruhelagen: $\dot{x} = 0$, $f(x,u) = 0$ $\qquad$ $\underline{F=1 \text{ und } M\,[kg]=1}$

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{h_1-h_2}\,\operatorname{sgn}(h_1-h_2) \\ \sqrt{|h_1-h_2|}\,\operatorname{sig}(h_1-h_2) - \sqrt{h_2-h_3}\,\operatorname{sgn}(h_2-h_3) \\ \sqrt{|h_2-h_3|}\,\operatorname{sgn}(h_2-h_3) - \sqrt{|h_3|} + u_2 \end{pmatrix}$$

$h_1 \geq h_2 \geq h_3$:

$$f_1(x,u) = 0 \Rightarrow u_1 - \sqrt{h_1-h_2} = 0 \xRightarrow{\text{Ruhelage}} u_{1_0} = \sqrt{h_{1_0}-h_{2_0}} \quad //$$

$$f_2(x,u) = 0 \Rightarrow \sqrt{h_1-h_2} - \sqrt{h_2-h_3} = 0 \qquad \sqrt{h_{1_0}-h_{2_0}} = \sqrt{h_{2_0}-h_{3_0}} \quad (I)$$

$$f_3(x,u) = 0 \Rightarrow \sqrt{h_{2_0}-h_{3_0}} - \sqrt{h_{3_0}} + u_{2_0} = 0 \Rightarrow \sqrt{h_{2_0}-h_{3_0}} - \sqrt{h_{3_0}} = -u_{2_0}$$

Aufgabe 8.1

(ii) Ruhelagen: $u_0, x_0 \to$ konstanten.

$$f(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} u_{1_0} - \sqrt{h_{1_0} - h_{2_0}} \\ \sqrt{h_{1_0} - h_{2_0}} - \sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}} \\ \sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}} - \sqrt{h_{3_0}} + u_{2_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0, u_0) \\ f_2(x_0, u_0) \\ f_3(x_0, u_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$f_1 + f_2 + f_3 \to -\sqrt{h_{3_0}} + u_{1_0} + u_{2_0} = 0$$

$$\boxed{h_{3_0} = (u_{1_0} + u_{2_0})^2} \quad //$$

$$f_1 + f_2 \to -\sqrt{h_{2_0} - h_{3_0}} + u_{1_0} = 0$$

$$\boxed{h_{2_0} = 2u_{1_0}^2 + 2u_{1_0}u_{2_0} + u_{2_0}^2} \quad //$$

$$f_1 = -\sqrt{h_{1_0} - h_{2_0}} + u_{1_0} = 0 \to \boxed{h_{1_0} = 3u_{1_0}^2 + 2u_{1_0}u_{2_0} + u_{2_0}^2} \quad //$$

Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$
$$y = C\Delta x + D\Delta u$$

Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung: Ruhelagen, $h_1 \geq h_2 \geq h_3$, $\underbrace{u_1}_{=q_{e1}}, \underbrace{u_2}_{=q_{e2}} \geq 0$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \Rightarrow x_1 = h_1, \ x_2 = h_2, \ x_3 = h_3$$

i) $y = x$

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{x_1 - x_2} \\ \sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2 - x_3} \\ \sqrt{x_2 - x_3} - \sqrt{x_3} + u_2 \end{pmatrix}$$

ii) $x_0 = [x_{1_0} \ x_{2_0} \ x_{3_0}]$, (u_{1_0}, u_{2_0}) (Ruhelagen):

$$\begin{cases} x_{1_0} = 3u_{1_0}^2 + 2u_{1_0}u_{2_0} + u_{2_0}^2 \\ x_{2_0} = 2u_{1_0}^2 + 2u_{1_0}u_{2_0} + u_{2_0}^2 \\ x_{3_0} = (u_{1_0} + u_{2_0})^2 \end{cases}$$

Aufgabe 8.1

$$\Delta x(t_{AB}) = x_{AB} - x_0$$

$\hookrightarrow$ Anfangsbedingung

(iii) Linearisierung:

A B

$$\Delta \dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} \cdot \Delta u$$

$$\Delta y = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} \Delta x + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} \Delta u$$

C D

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 8.1

(iii) Linearisierung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(u_1 - (x_1 - x_2)^{1/2}\right)}{\partial x_1} = -\frac{(x_1 - x_2)^{-1/2}}{2}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_e, u_0} = -\frac{1}{2}\left(\left(3u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2\right) - \left(2u_{10}^2 + 2u_{10}u_{20} + u_{20}^2\right)\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2u_{10}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial\left(u_1 - (x_1 - x_2)^{1/2}\right)}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^{-1/2} \Rightarrow \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_0, u_0} = \frac{1}{2u_{10}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

Aufgabe 8.1

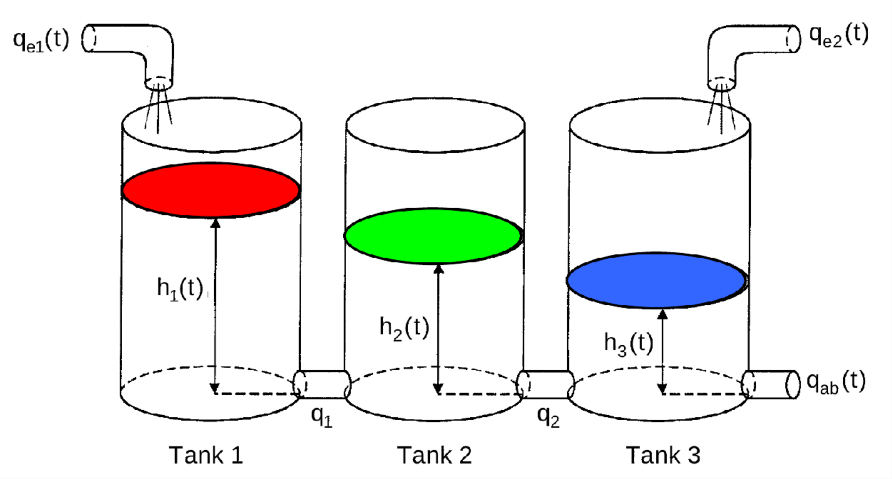
(iii) Linearisierung:

$$A = \begin{bmatrix} -1/2u_{10} & 1/2u_{10} & 0 \\ 1/2u_{10} & -1/u_{10} & 1/2u_{10} \\ 0 & 1/2u_{10} & \frac{-2u_{10}+u_{20}}{2u_{10}(u_{10}+u_{20})} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = id, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \cancel{}$$

Aufgabe 8.2

Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit) q_{e1} bzw. q_{e2}, aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz q_{ab} ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände h1, h2, h3 (das sind also die Ausgänge).



Gesetz von Torricelli:

$$q_{ab} = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3},$$

$$q_i = \mu\sqrt{2g}\, sign(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|},$$

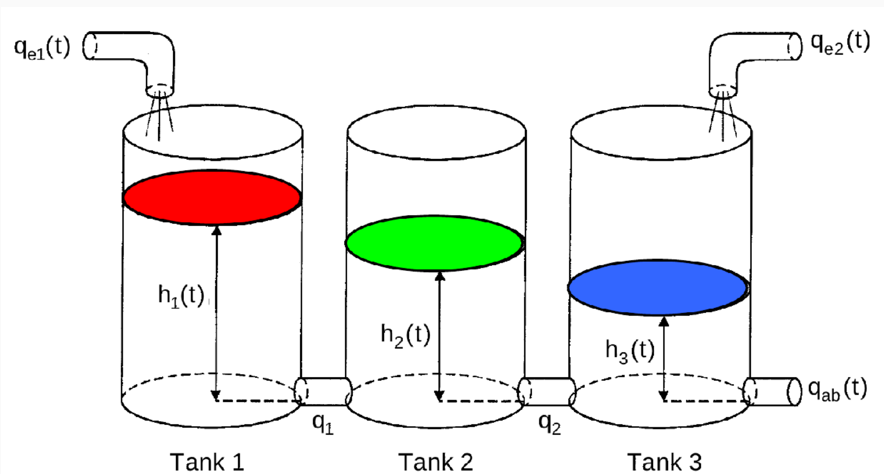
sowie g, μ, $F > 0$, $q_{ei} \geq 0$, $h_i \geq 0$.

Aufgabe 8.2

(i) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ in jeder Ruhelage durch den Eingang Δq_{e1} allein steuerbar ist. Hinweis: Linearisiert wird im Punkt $u = (q_{e1}, q_{e2})$ mit zugehörigem h wie bisher. Durch den Eingang Δq_{e1} allein steuerbar zu sein bedeutet, daß der zweite Eingang *der bereits vorliegenden Linearisierung* nicht benutzt wird, also stets den Wert 0 haben soll. Überlegen Sie sich, wie die Anordnung reagiert, wenn Sie sich zunächst in einer Ruhelage befindet und Sie dann den Durchsatz q_{e1} erhöhen bzw. verringern. Kann es z.B. vorkommen, daß sich h_1 und h_3 verringern, während sich h_2 vergrößert? Wie päst das zur Steuerbarkeit?

Aufgabe 8.2

Definition 3.5: Ein dynamisches System (A, b) heißt **steuerbar**, wenn der Zustandsvektor $x(t)$ durch eine geeignete Steuerfunktion $u(t)$ in einer endlichen Zeitspanne $[t_0, t_e]$ aus jedem Anfangzustand $x(t_0)$ in jeden gewunschten Endzustand $x(t_e)$ überführt werden kann.
(*Auch: vollständig z-steuerbar.*)



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} & 0 \\ \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{1}{u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{2u_{0,1}+u_{0,2}}{2u_{0,1}(u_{0,1}+u_{0,2})} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = I_{3x3}, D = 0_{3x2}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit Ruhelage: $u_0 = [u_{0,1} \quad u_{0,2}]$
$y_0 = [h_{e1} \quad h_{e2} \quad h_{e3}]$.

Aufgabe 8.2

Steuerbarkeitskriterien

Satz 3.2 *(Steuerbarkeitskriterien)*

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) (Kalman-Kriterium)

dann und nur dann vollständig z–steuerbar, wenn für die $(n \times n)$ Steuerbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_S$ gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang}\left[\mathbf{b}\ \mathbf{Ab}\ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\right] = n \tag{3.37}$$

Der Rang der Steuerbarkeitsmatrix gibt die Anzahl der steuerbaren Zustandsgrößen an.

a2) (Hautus-Kriterium)

Überprüfung der einzelnen Eigenwerte auf Steuerb

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S^* = \text{Rang}\left[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\ \mathbf{b}\right]_{\lambda=\lambda_i} = n \tag{3.38}$$

Man sagt dann auch, dass der Eigenwert λ_i nicht steuerbar ist !!

mit $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ den Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$.

Ist die Bedingung nicht erfüllt, so kann die zugehörige Eigenbewegung nicht beeinflusst werden.

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Regelungstechnik

Aufgabe 8.2

(i) $$Q_S = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2u_{10} & 1/2u_{10}^2 \\ 0 & 1/2u_{10} & -3/4u_{10}^2 \\ 0 & 0 & 1/4u_{10}^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(Q_S) \neq 0 \rightarrow \det(Q_S) = \frac{1}{2u_{10}} \cdot \frac{1}{4u_{10}^2} = \frac{1}{8u_{10}^3} \neq 0$$

rang = 3, System steuerbar, da rang = n = 3.

Aufgabe 8.2

(ii) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ in jeder Ruhelage allein durch Messung des Ausgangs Δh_3 beobachtbar ist.

$C \neq id_{3\times3} \rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 8.2

Definition 3.7 *Beobachtbarkeit*

Das dynamische System (3.1) heißt *vollständig beobachtbar* im Intervall $[t_0, t_e]$, wenn für gegebene t_0 und t_e jeder Systemzustand $\boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ aus der Kenntnis der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ in $[t_0, t_e]$ ermittelt werden kann. □

Aufgabe 8.2

Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit

Duales System

Mit Hilfe der transponierten Matrizen bzw. Vektoren A^T, b^T, c eines Zustandsmodells (A, b, c^T) lässt sich das sogenannte duale System bilden:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}^T\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{c}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \boldsymbol{b}^T\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned}$$

Originalsystem | **Duales System**

Satz 3.5 (Dualität von Steuer– und Beobachtbarkeit)

Ein zeitinvariantes System (3.1) ist vollständig zustandssteuerbar (beobachtbar), wenn sein duales System (3.51) vollständig beobachtbar (zustandssteuerbar) ist.

$\Rightarrow$ **Ein Programm zur Überprüfung der Steuerbarkeit kann auch zur Überprüfung der Beobachtbarkeit eingesetzt werden.**

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek | Regelungstechnik

Aufgabe 8.2

(ii) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ in jeder Ruhelage allein durch Messung des Ausgangs Δh_3 beobachtbar ist.

$$y = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} = id_{3\times 3} \cdot \Delta x$$

$$\hookrightarrow y = \Delta h_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= C} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} + \cancel{D} \cdot u \qquad D = 0$$

Aufgabe 8.2

(ii) Duale System:

$$\hat{A} = A^T \qquad \hat{Q}_S = [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \hat{A}^2\hat{B}] = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T]$$

$$\hat{B} = C^T$$

$$\hat{Q}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4u_{10}^2} \\ 0 & \frac{1}{2u_{10}} & \frac{4u_{10}+3u_{20}}{4u_{10}^2(u_{10}+u_{20})} \\ 1 & \frac{2u_{10}+u_{20}}{2u_{10}(u_{10}+u_{20})} & \frac{5u_{10}^2+6u_{10}u_{20}}{4u_{10}^2(u_{10}+u_{20})^2} \end{pmatrix}$$

$\det(\hat{Q}_S) \neq 0 \rightarrow$ beobachtbar ✓

Aufgabe 8.2

(iii) Betrachten Sie hier die Linearisierung mit nur einem Eingang Δq_{e1} in der Ruhelage mit $q_{e1} = q_{e2} = 1/2$ und geeigneten h_i.
Bestimmen Sie Δq_{e1} so, daß der Zustand Δh der Linearisierung in der Zeit 3 von 0 nach $(-0.005, 0.005, -0.005)$ überführt wird. (Benutzen Sie ggf einen Rechner!) $t_1 \quad t_2 \quad t_3$

$x = [\Delta h_1 \quad \Delta h_2 \quad \Delta h_3]^T \,, \quad y = \Delta h_3 \,, \quad u = \Delta u_1$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} \,, \quad B = (1 \quad 0 \quad 0)^T$

$c = (0 \quad 0 \quad 1) \,, \quad D = 0$

Aufgabe 8.2

(iii) Differentialgleichung:

$$\Delta \dot{h}_1(t) = -\Delta h_1(t) + \Delta h_2(t) + \Delta u_1(t)$$

$$\Delta \dot{h}_2(t) = \Delta h_1(t) - 2\Delta h_2(t) + \Delta h_3(t)$$

$$\Delta \dot{h}_3(t) = \Delta h_2(t) - 3\Delta h_3(t)/2$$

- Anfangsbedingungen $(t=0)$: $h_{0,1}=0$, $h_{0,2}=0$, $h_{0,3}=0$
- Endbedingungen $(t=3)$: $\Delta h_1(t=3) = -0{,}005$

$$\Delta h_2(t=3) = 0{,}005$$

$$\Delta h_3(t=3) = -0{,}005$$

Aufgabe 8.2

(iii) Ansatz: u_1 stückweise konstant:

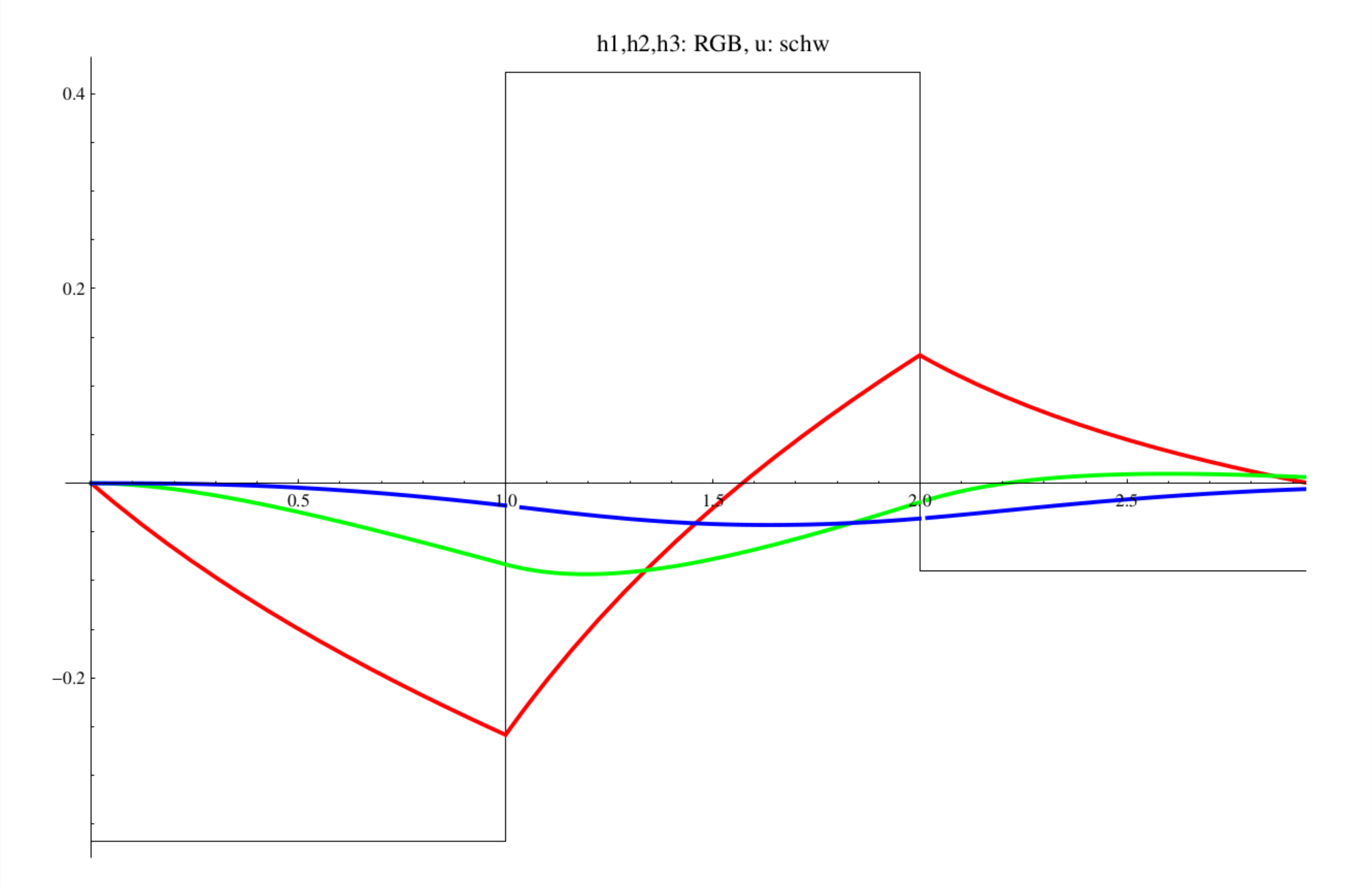
$$u_1(t) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq t < 1 \\ z_2, & 1 \leq t < 2 \\ z_3, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

- Berechnung von M: h(1), h(2) und h(3) nacheinander berechnen mit Lösungsformel Lin. Glg-system zu lösen

$\Rightarrow M\,z = \text{Zielpunkt}$

Lösung: $\{z_1 \rightarrow -0{,}367969,\ z_2 \rightarrow 0{,}421585,\ z_3 \rightarrow 0{,}0898767\}$

Aufgabe 8.2



Aufgabe 9.1

Betrachtet wird das Zustandsraumsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit den Werten für A, B, C und D, die in Aufgabe 8.2 berechnet wurden. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer Linearisierung in der Ruhelage mit $q_{e1} = q_{e2} = 1/2$ und geeigneten h_i.

(i) Betrachten Sie die Linearisierung mit nur einem Eingang, Δq_{e1}, und bestimmen Sie eine lineare Zustandsrückführung derart, daß das char. Polynom des geschlossenen Regelkreises die Nullstellen -1, -2 und -3 besitzt.

Zustandsrückführung (3)

Modell der Regelstrecke:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}[z(t) + u(t)]$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$$

Durch Einsetzen des Regelgesetzes

$$u(t) = -\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}(t)$$

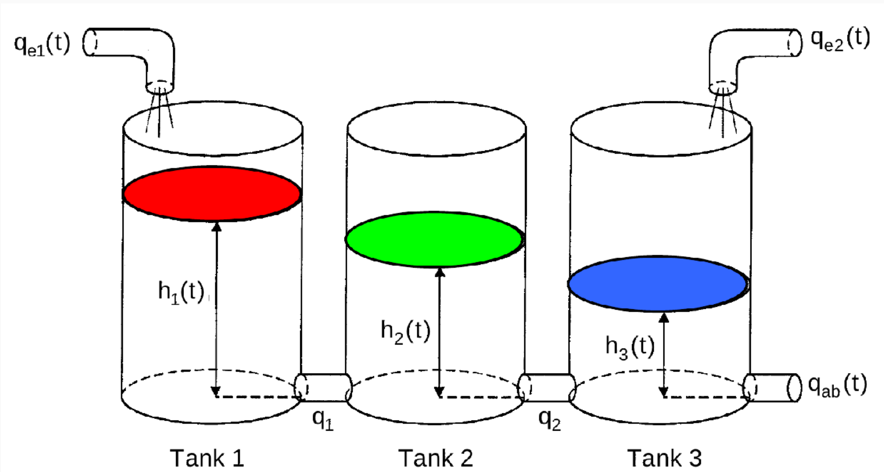
erhält man das Zustandsmodell des geschlossenen Kreises:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T\right]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}z(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$$

Systemmatrix $\mathbf{A}_G$ des geschlossenen Kreises

Aufgabe 9.1



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} & 0 \\ \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{1}{u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{2u_{0,1}+u_{0,2}}{2u_{0,1}(u_{0,1}+u_{0,2})} \end{bmatrix}$$

$C = [0 \quad 0 \quad 1]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}, D = 0$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit Ruhelage: $u_0 = [0,5 \quad 0,5]$

$y_0 = [h_{0,1} \quad h_{0,2} \quad h_{0,3}]$.

Aufgabe 9.1

(i) $\begin{cases} \Delta \dot{x} = (A - Bk)\Delta x \\ y = C\Delta x \end{cases}$ $\quad k = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

Ruhelage : $u_0 = [0{,}5 \quad 0{,}5]$

$\det(A - Bk - s\,id) \Rightarrow$

$$(A - Bk - s\,id) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2 \quad k_3) - s\,id$$

$$= \begin{pmatrix} -1 - k_1 - s & 1 - k_2 & -k_3 \\ 1 & -2 - s & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} - s \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.1

(i) $$\det(A - Bk - s\,\mathrm{id}) = (-1 - k_1 - s)(-2 - s)\left(-\tfrac{3}{2} - s\right) - k_3 + (1 + k_1 + s) + \left(\tfrac{3}{2} + s\right)(1 - k_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$s^3 + \underbrace{\left(\tfrac{9}{2} + k_1\right)}s^2 + \underline{\left(\tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2}k_1 + k_2\right)}s + \underline{\left(k_3 + \tfrac{3}{2}k_2 + 2k_1 + \tfrac{1}{2}\right)} = 0$$

Gegebenes Polynom: $(1+s)(2+s)(3+s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2k_1 + \frac{3k_2}{2} + k_3 = 6 \\ \frac{9}{2} + \frac{7}{2}k_1 + k_2 = 11 \\ \frac{9}{2} + k_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow k = \begin{bmatrix} 3/2 & 5/4 & 5/8 \end{bmatrix}^T$$

Aufgabe 9.1

(ii) Betrachten Sie die Linearisierung mit nur einem Ausgang, Δh_3, und bestimmen Sie einen Beobachter, der -5 als dreifachen Eigenwert besitzt.

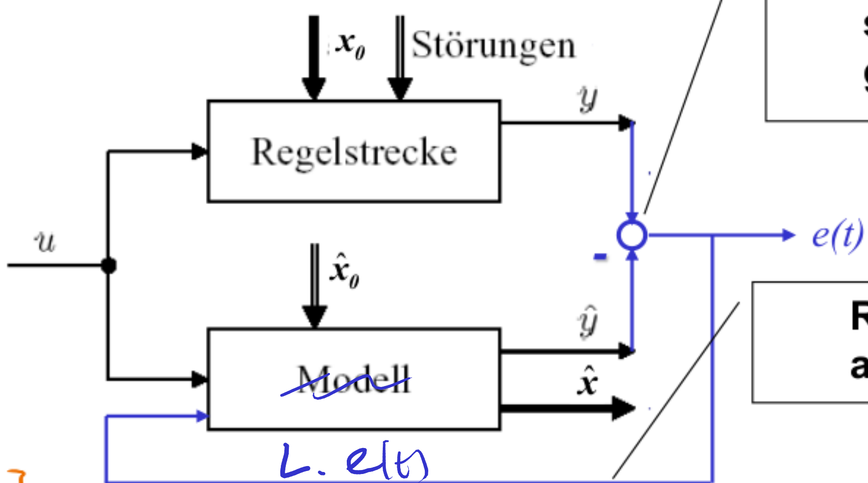
Beobachterentwurf (5)

Grundidee des Beobachters (2)

Gemessene Regelgröße *y(t)* wird bisher nur zur Rekonstruktion des Anfangswertes verwendet.

Idee von Luenberger 1964:

Kontinuierliche Berechnung der Differenz zwischen gemessener und simulierter Regelgröße.



Rückführung dieser Differenz auf den Eingang des Modells.

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

Aufgabe 9.1

(ii) $C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, A^T, C^T, L^T anstelle von A, B, K:

Sollpolynom: $(s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125$

$L^T = [l_1, l_2, l_3]$ $\qquad C^T L^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$

$(\hat{A} - \hat{B}\hat{k}) = (A^T - C^T L^T) \rightarrow \det(A^T - C^T L^T)$

$\det(A^T - C^T L^T - s\,id) = \det \begin{bmatrix} -1-s & 1 & 0 \\ 1 & -2-s & 1 \\ -l_1 & 1-l_2 & -\frac{3}{2} - l_3 - s \end{bmatrix} = 0$

(ii) $s^3 + \underbrace{\left(\tfrac{9}{2} + l_3\right)}_{\|} s^2 + \underbrace{\left(\tfrac{9}{2} + l_2 + 3l_3\right)}_{\|} s + \underline{\left(\tfrac{1}{2} + l_1 + l_2 + l_3\right)} = 0$

ges. Pol. $s^3 + 15\, s^2 + 75\, s + 125$

$$\begin{cases} \tfrac{9}{2} + l_3 = 15 \\ \tfrac{9}{2} + l_2 + 3l_3 = 75 \\ \tfrac{1}{2} + l_1 + l_2 + l_3 = 125 \end{cases} \Rightarrow L^T = [75,\ 39,\ 21/2]$$

Aufgabe 9.1

(iii) Verifizieren Sie numerisch mit Software Ihrer Wahl, daß der Beobachter aus (ii) die Zustände Δh_1 und Δh_2 der Linearisierung tatsächlich beobachtet. Wählen Sie dazu $\Delta u_1(t) = t/10$, $\Delta u_2(t) = 0$, $\Delta h(0) = (-0.1, 0.2, 0.1)$ und $\Delta\hat{h}(0) = (0, 0, 0)$. ($\Delta\hat{h}$ ist der Beobachterzustand.)

Aufgabe 9.1

(iii) Eingangssignal = $u(t) = t/10$

$$\left.\begin{cases} \Delta\dot{x}_1(t) = t/10 - \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x}_2 = \Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta x_3 \\ \Delta\dot{x}_3 = \Delta x_2 - \frac{3\Delta x_3}{2} \end{cases}\right\}$$ Lin. System

Beobachter: ↑ Kopie des Systems

Messung

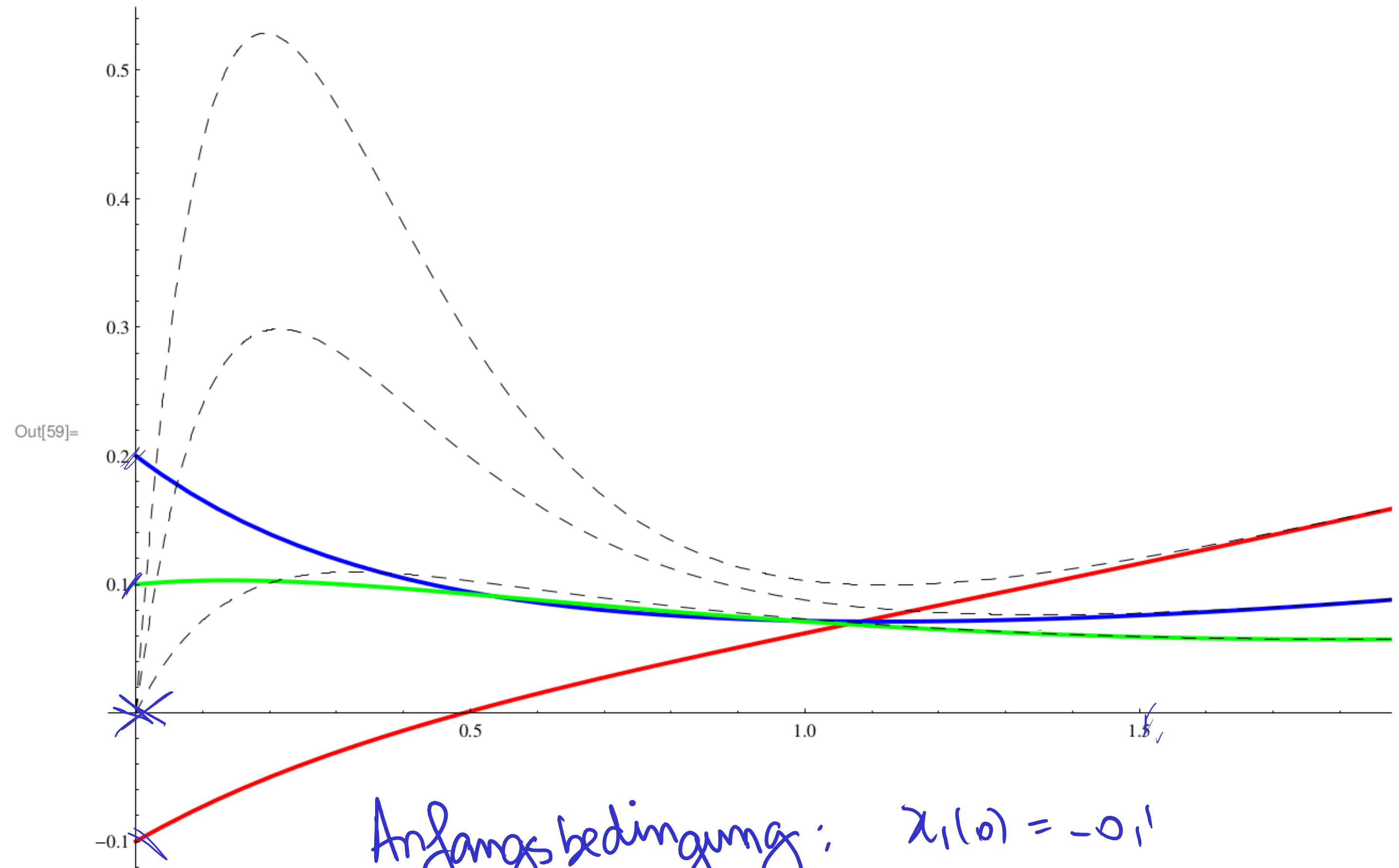
Rückführungsteil

$$\Delta\dot{\hat{x}}_1 = \frac{t}{10} - \Delta\hat{x}_1 + \Delta\hat{x}_2 + 75(\Delta x_3 - \Delta\hat{x}_3)$$

$$\Delta\dot{\hat{x}}_2 = \Delta\hat{x}_1 - 2\Delta\hat{x}_2 + \Delta\hat{x}_3 + 39(\Delta x_3 - \Delta\hat{x}_3)$$

$$\Delta\dot{\hat{x}}_3 = \Delta\hat{x}_2 - \frac{3\Delta\hat{x}_3}{2} + \frac{21}{2}(\Delta x_3 - \Delta\hat{x}_3)$$

Aufgabe 9.1



Anfangsbedingung:

$x_1(0) = -0{,}1$ $\hat{x}_1(0) = 0$

$x_2(0) = 0{,}2$ $\hat{x}_2(0) = 0$

$x_3(0) = 0{,}1$ $\hat{x}_3(0) = 0$