Regelungstechnik

8. Übung

Victor Cheidde Chaim

13. März 2023

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h.,prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= A\Phi(t), \\ \Phi(0) &= I \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).

(ii) $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha + 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).

(iv) Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).

Aufgabe 7.3

(i) $\phi(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + e^{t} & -2e^{-t/2} + 2e^{t} \\ -e^{-t/2} + e^{t} & e^{-t/2} + 2e^{t} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Überprüfung: $\underline{\underline{\dot\phi(t) = A \cdot \phi(t)}}$, $\underline{\phi(0) = id}$ $\quad e^{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Rightarrow e^{0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

$e^{0} = 1$

$$\phi(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \cdot e^{0} + e^{0} & -2e^{0} + 2e^{0} \\ -e^{0} + e^{0} & e^{0} + 2e^{0} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 & \cancel{-2 \cdot 1 + 2 \cdot 1} \\ \cancel{-1 + 1} & 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id$$

Aufgabe 7.3

(i) $\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t)$

$$\phi(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + e^{t} & -2e^{-t/2} + 2e^{t} \\ -e^{-t/2} + e^{t} & e^{-t/2} + 2e^{t} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\phi}(t) = \frac{d}{dt}\exp(At) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(2e^{-t/2} + e^{t}) & \frac{d}{dt}(-2e^{-t/2} + 2 \cdot e^{t}) \\ \frac{d}{dt}(-e^{-t/2} + e^{t}) & \frac{d}{dt}(e^{-t/2} + 2e^{t}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 2e^{-t/2} + 1 \cdot e^{t} & -\frac{1}{2}(-2)e^{-t/2} + 2 \cdot 1 \cdot e^{t} \\ (-\frac{1}{2}) \cdot (-1)e^{-t/2} + 1 \cdot e^{t} & -\frac{1}{2}e^{-t/2} + 2 \cdot 1 \cdot e^{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{-t/2} + e^{t} & e^{-t/2} + 2e^{t} \\ \frac{e^{-t/2}}{2} + e^{t} & -\frac{e^{-t/2}}{2} + 2e^{t} \end{pmatrix},$$

Aufgabe 7.3

(i)

$$\dot{\phi}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{-t/2}+e^{t} & e^{-t/2}+2e^{t} \\ \frac{e^{-t/2}}{2}+e^{t} & -\frac{e^{-t/2}}{2}+2e^{t} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot\phi(t) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-t/2}+e^{t} & -2e^{-t/2}+2e^{t} \\ -e^{-t/2}+e^{t} & e^{-t/2}+2e^{t} \end{pmatrix}}^{\phi(t)} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{-t/2}+e^{t} & e^{-t/2}+2e^{t} \\ \frac{1}{2}\left(2\cdot e^{-t/2}+e^{t}\right)+\frac{1}{2}\left(-e^{-t/2}+e^{t}\right) & \frac{1}{2}\left(-2e^{-t/2}+2e^{t}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-t/2}+2e^{t}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{-t/2}+e^{t} & e^{-t/2}+2e^{t} \\ e^{-t/2}+e^{t} & -\frac{1}{2}e^{-t/2}+2e^{t} \end{pmatrix} = \dot{\phi}(t)$$

(✓)

Aufgabe 7.3

(ii) $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \phi(t) = ?$

EW von A: $\det(A - \lambda \cdot id) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -3/2 - \lambda & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 - \lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$= \lambda^2 + \lambda \underbrace{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{=2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$$

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!} \qquad = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -1}$$

$$A = (A - \lambda \cdot id) + \lambda \cdot id$$

(ii) $A = (A - \lambda \mathrm{id}) + \lambda \mathrm{id}$

$$\exp(At) = \exp(((A-\lambda \mathrm{id}) + \lambda \mathrm{id})t) = \underbrace{\exp((A-\lambda \mathrm{id})t)}_{(\mathrm{I})} \cdot \underbrace{\exp(\lambda \mathrm{id})}_{(\mathrm{II})}$$

$$\mathrm{I}): \quad \exp((A-\lambda \mathrm{id})t) = \exp\begin{pmatrix} (-3/2-(-1))t & 1/2\, t \\ -1/2\, t & (-1/2-(-1)) \cdot t \end{pmatrix} =$$

$$= \exp\begin{pmatrix} -1/2 \cdot t & 1/2\, t \\ -1/2 \cdot t & 1/2\, t \end{pmatrix},$$

$(A-\lambda \mathrm{id})$ EW von $\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \to$ nilpotent

$A^k = 0, \; k \geq c, \quad c \in \mathbb{N}$

$$\exp((A-\lambda \mathrm{id})t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda \mathrm{id})^n t^n}{n!}$$

Aufgabe 7.3

(ii) $(A-\lambda\,\mathrm{id})$ ist nilpotent, $(A-\lambda\,\mathrm{id})^k = 0$, $k \geq c$, $c = ?$

$$(A-\lambda\,\mathrm{id})^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-\lambda\,\mathrm{id})^k = 0, \quad k \geq 2.$$

$$\exp((A-\lambda\,\mathrm{id})t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda\,\mathrm{id})^n \cdot t^n}{n!} = \mathrm{id} + (A-\lambda\,\mathrm{id})t + \cancel{\frac{(A-\lambda\,\mathrm{id})^2 \cdot t^2}{2} + \dots} \to 0$$

$$\exp((A-\lambda\,\mathrm{id})t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 - t/2 & 1/2 \\ -t/2 & 1 + t/2 \end{pmatrix}$$

Id: $$\exp(\lambda\,\mathrm{id} \cdot t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\,\mathrm{id})^n \cdot t^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!}}_{= e^{\lambda t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot \mathrm{id}$$

Diagonalmatrix

Aufgabe 7.3

(ii) $\phi(t) = \exp(At) = \exp((A-\lambda \mathrm{id})t) \cdot \exp(\lambda \mathrm{id}\, t) =$

$$= \begin{pmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{id}\, e^{-t} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{pmatrix}$$

Probe: $\phi(0) = e^{0} \begin{pmatrix} 1-0/2 & 0/2 \\ -0/2 & 1+0/2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$

$\dot\phi(t) = A \cdot \phi(t) \rightarrow \dot\phi(t) = (-1) \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ t/2-1/2 & -t/2-1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

(ii)

~~(iii)~~

$$\dot{\phi}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ t/2-1/2 & -t/2-1/2 \end{pmatrix} =$$

$$A\cdot\phi(t) = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{pmatrix} e^{-t} = e^{-t}\begin{pmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ t/2-1/2 & -1/2-t/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\phi}(t) = A\cdot\phi(t)}$$

(✓)

Aufgabe 7.3

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EW von A: $\det(A - \lambda\, id) = 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(1-\lambda)^3 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 1}$

$A = (A - \lambda id) + \lambda id$

nilpotent

$e^{\lambda t} \cdot id$

$$\phi(t) = \exp(At) = \underbrace{\exp((A - \lambda id)t)}_{(I)} \underbrace{\exp(\lambda id)}_{(II)}$$

Aufgabe 7.3

(iii) I): $\exp((A-\lambda \, id)t)$

EW: $(A-\lambda \, id)$, $p \to \det(A-\lambda \, id - p \cdot id) = 0$, $\lambda = 1$

$$\det\begin{pmatrix} 1-1-p & 2 & 0 \\ 0 & 1-1-p & 2 \\ 0 & 0 & 1-1-p \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -p & 2 & 0 \\ 0 & -p & 2 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = 0$$

$p^3 = 0 \to$ EW von $(A-\lambda \, id) = 0 \to (A-\lambda \, id)$ ist nilpotent

$(A-\lambda \, id)^k = 0$, $k \geq c$

Aufgabe 7.3

(iii)

$$(A-\lambda id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda id)^3 = (A-\lambda id)^2 (A-\lambda id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A-\lambda id)^k = 0, \quad k \geq 3.$$

$$0$$

$$\exp((A-\lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda id)^n t^n}{n!} = id + (A-\lambda id) t + (A-\lambda id)^2 \frac{t^2}{2} + \cancel{(A-\lambda id)^3 \frac{t^3}{6}} + \dots$$

$$= id + (A-\lambda id) t + (A-\lambda id)^2 \cdot \frac{t^2}{2}$$

Aufgabe 7.3

(iii)

$$\exp((A-\lambda\,id)t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$\exp(\lambda\,id) = e^{\lambda t} \cdot id = e^{t} \cdot id //$$

$$\exp(At) = \exp((A-\lambda\,id)t)\exp(\lambda\,id\,t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 7.3

(iii)

$$\phi(0) = e^0 \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0^2 \\ 0 & 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = id \quad (\checkmark)$$

$$\phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\dot\phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4t \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\checkmark$ $\dot\phi(t) = A\phi(t)$

Aufgabe 7.3

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha = 1 \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ A_{11} A_{12} A_{22}

$\dot{\Phi} = A \cdot \Phi \rightarrow \dot{\Phi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ 0 & \Phi_{22} \end{pmatrix} \leftarrow$ ↳ EW ≠ 0 und haben verschiedene Werte

1: A_{11}: $\Phi_{11} = \exp(A_{11} \cdot t) = e^{t}$ (skalar)

EW:

2: A_{22}: $\Phi_{22} = \exp(A_{22} \cdot t) \Rightarrow \det(A_{22} - \lambda \, id) = 0$

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = 2} \rightarrow \exp(A_{22} \cdot t) = \exp((A_{22} - \lambda \, id) t) \, \exp(\lambda \, id \cdot t)$

$= e^{2t} \cdot id$

Aufgabe 7.3

(iv) $\exp\big(\overset{\Rightarrow\ \text{nilpotent}}{(A_{22}-\lambda\, id)}\, t\big)$ $\overset{\text{EW:}}{\Rightarrow} \det(A_{22}-\lambda\, id - p\, id) = \det\begin{pmatrix} 0-p & 2 \\ 0 & 0-p \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow p_{1,2} = 0 \rightarrow$ nilpotent

$(A_{22}-\lambda\, id)^k = 0, \quad k \geq c$:

$$(A_{22}-\lambda\, id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = 2$$

$$\exp\big((A_{22}-\lambda\, id)t\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (A_{22}-\lambda\, id)^n}{n!} = id + (A_{22}-\lambda\, id)t + \cancel{\frac{(A_{22}-\lambda\, id)^2 t^2}{2}} + \dots$$

0

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(A_{22} t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} \;//$$

Aufgabe 7.3

(iv) ϕ_{12}: $\dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11} & \dot{\phi}_{12} \\ 0 & \dot{\phi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\dot{\phi}_{12} = A_{11} \cdot \phi_{12} + A_{12} \cdot \phi_{22} = \phi_{12} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

$$= \phi_{12} + \begin{pmatrix} 2 & 4t+1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\dot{\phi}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \phi_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_{12} + \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 4te^{2t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2e^{2t} \\ \dot{x}_2 = x_2 + \left(e^{2t} + 4te^{2t}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} \cdot 2e^{2\tau} \, d\tau \\ x_2(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} \cdot \left(e^{2\tau} + 4\tau e^{2\tau}\right) d\tau \end{cases}$$

* Wir beenden diese Aufgabe im nächsten Seminar.