Regelungstechnik

7. Übung

Victor Cheidde Chaim

06. März 2023

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

WOK-Verfahren

Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der Wurzelort ist der geometrische Ort der Lösungen (Wurzeln) der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0$$

des geschlossenen Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die Wurzelortskurve (WOK) stellt die Abhängigkeit der Wurzelorte von einem Parameter (vielfach der Verstärkung K_0) des offenen Regelkreises dar.

$$\boxed{1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0}$$

Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$\boxed{C(s) = N_0(s) + Z_0(s)}$$

Aufgabe 7.1

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion G,

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)\left(s^2+4s+13\right)}.$$

$$\begin{cases} G_0(s) = G(s)R(s) \\ R(s) = K \end{cases}$$

Wir betrachten die Wurzelortskurve unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h., eines P-Reglers mit positiver Verstärkung).

(i) Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte der Wurzelortskurve. Nutzen Sie dazu die Regeln aus dem Skript und die entsprechenden Zusatzfolien zur Übung.

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞, Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

Aufgabe 7.1

(i) Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte der Wurzelortskurve.

10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	Allgemein gilt am Verzweigungspunkt a: $\frac{\mathrm{d}G_0(s)}{\mathrm{d}s}\Big\|_{s=a} = 0$ Für $a \neq p_i$ und $a \neq n_i$ gilt damit: a) reelle Pole und Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a - p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a - n_i}$

$$G_0(s) = \frac{k}{(1+s)\cdot(s+3)\cdot(s^2+4s+13)}$$

Pole: $(1+s)(3+s)(s^2+4s+13) = 0$

$p_1 = -1$

$p_2 = -3$

$$p_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16-52}}{2}$$

$$p_{3,4} = -2 \pm \frac{\sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i$$

4 Pole: $n = 4$

0 NS: $m = 0$

Aufgabe 7.1

(i) Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte der Wurzelortskurve.

$p_1 = -1, \quad p_2 = -3, \quad p_3 = -2+3i, \quad p_4 = -2-3i$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a-p_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{a-n_j} \rightarrow \frac{1}{(a+1)} + \frac{1}{(a+3)} + \frac{1}{(a+2-3i)} + \frac{1}{(a+2+3i)} = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -2-2i \\ a_3 = -2+2i \end{cases} \qquad 1 + G_0(s) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 1 + G_0(a_1) = 0 \\ 1 + G_0(a_2) = 0 \\ 1 + G_0(a_3) = 0 \end{array}$$

$1 + G_0(a_1) = 0 \rightarrow K = 9$ reele und positive

$1 + G_0(a_2) = 0 \rightarrow K = 25$ " " "

$1 + G_0(a_3) = 0 \rightarrow K = 25$ " " "

Alle drei Verzweigungspunkte gehören zur WOK.

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞, Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$n - m$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n - m$ Asymptoten.

$n = 4$ (Anzahl Pole)

$m = 0$ (Anzahl NS)

$n - m = 4 - 0 = 4 \rightarrow 4$ Äste $\rightarrow \infty$.

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞, Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

$p_1 = -1, \quad p_2 = -3, \quad p_3 = -2+3i, \quad p_4 = -2-3i.$

8	Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt σ_W)	Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse. $$\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m} \quad \text{für} \quad n-m \geq 2$$

$$\sigma_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m} = \frac{(-1)+(-3)+(-2+\cancel{3i})+(-2-\cancel{3i})}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\boxed{\sigma_w = -2}$$

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞, Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

7	Winkel der Asymptoten	Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus $$\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[\varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n-m.$$

$k = 1, 2, 3, 4$

$n - m = 4$

$$\varphi_1 = \frac{(2 \cdot 1 - 1)\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_2 = \frac{(2 \cdot 2 - 1)\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi_3 = \frac{(2 \cdot 3 - 1)\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

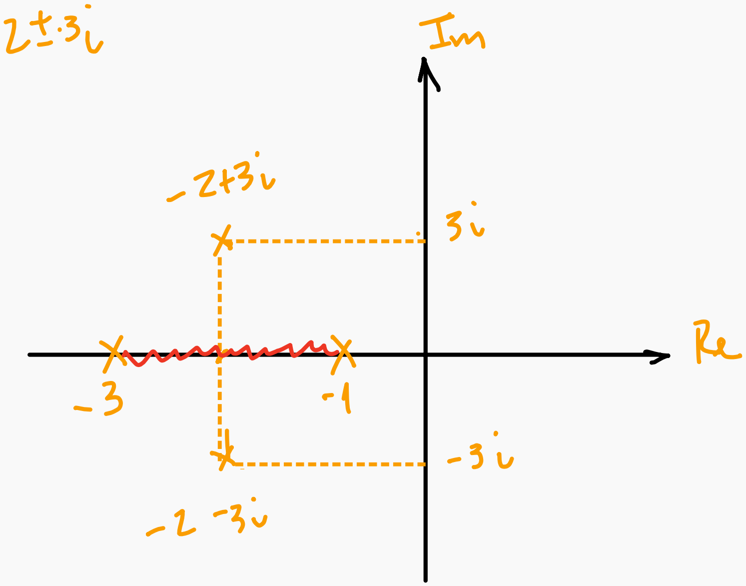
$$\varphi_4 = \frac{(2 \cdot 4 - 1)\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞, Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von Polen und Nullstellen ungerade [gerade]^2 ist, ist ein Wurzelort.

$p_1 = -1$, $p_2 = -3$, $p_{3,4} = -2 \pm 3i$



Aufgabe 7.1

(ii) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve (hier sind also zu berechnen: Pole, Nullstellen, Anzahl der Äste gegen ∞, Winkel der Asymptoten, Wurzelschwerpunkt, Intervalle auf reeller Achse).

— WOK

$p_1 = -1,\ p_2 = -3,\ p_{3,4} = -2 \pm 3i$

$\sigma_w = -2$

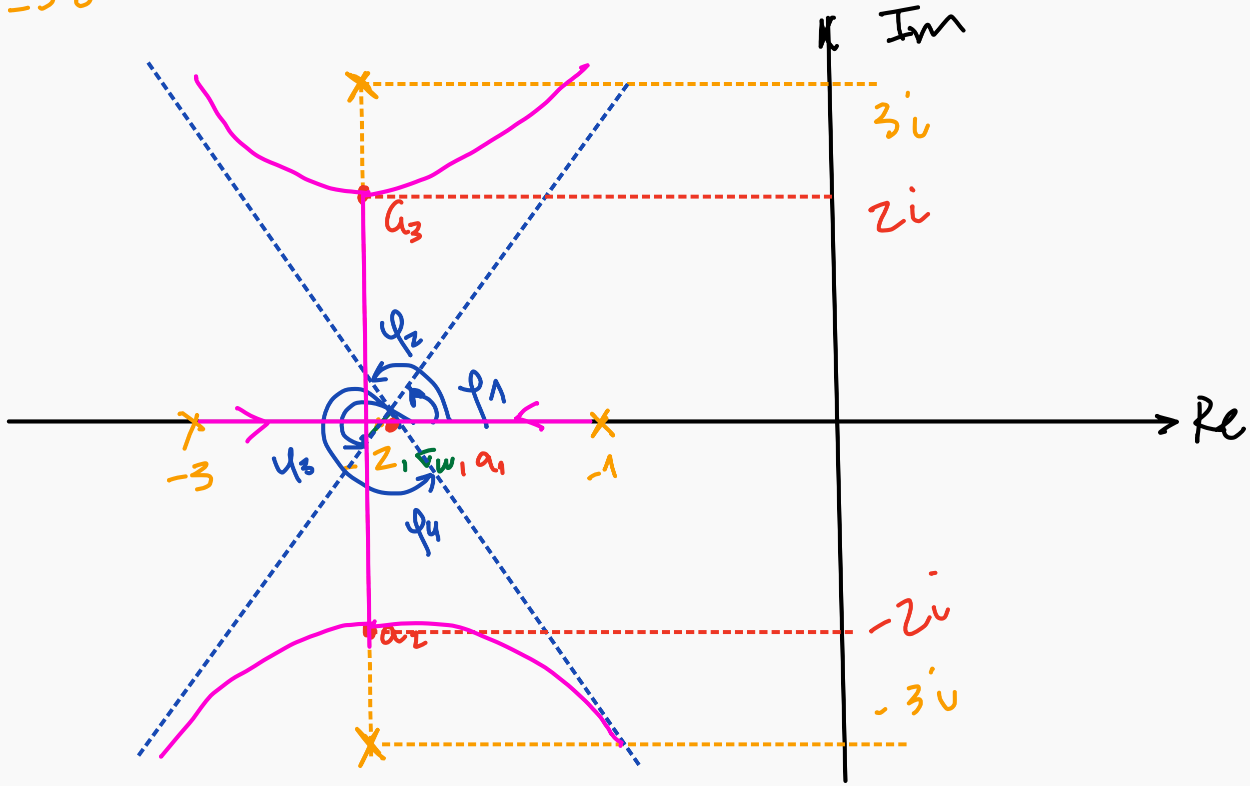
$a_1 = -2$

$a_2 = -2 - 2i$

$a_3 = -2 + 2i$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}$

$\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$



Aufgabe 7.2

Gegeben seien die Matrizen A und B. Berechnen Sie $exp(At)$, $exp(Bt)$ und $exp((A+B)t)$. Gilt hier $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

$$exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

nilpotent : (Ew = 0)

$k \in \mathbb{R}$

$A^m = 0, \; m \geq k$

Aufgabe 7.2

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{EW:} \quad \det(A - \lambda \,\mathrm{id}) = 0 \to \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 = 0 \to \boxed{\lambda_{1,2} = 0}$$

↳ nilpotent!

$$\exp(At) = \frac{(A \cdot t)^0}{0!} + \frac{(At)^1}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = \underline{\mathrm{id} + At} + \cancel{\frac{A^2 t^2}{2}}^{\,0} + \cancel{\frac{A^3 t^3}{6}}^{\,0} \cancel{+ \dots}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} A^m = 0 \\ m \geq 2 \end{matrix}}$$

Aufgabe 7.2

$$\exp(At) = id + A.t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\exp(Bt) \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad EW(B): \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda) = 0 \to \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

B ist nicht nilpotent

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to B^2 = B$$

$$B^3 = B^2 . B = B . B = B^2 = B \to \boxed{B^n = B, \quad n \geq 1}$$

Aufgabe 7.2

$B^r = B, \quad r \geq 1$

$$\exp(Bt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Bt)^n}{n!} = id + Bt + \frac{B^2 t^2}{2!} + \frac{B^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$= id + B.t + B.\frac{t^2}{2!} + B.\frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= id + B \sum_{\underline{\underline{n=1}}}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \frac{B.t^0}{0!} - \frac{B.t^0}{0!}$$

$$= id - \frac{Bt^0}{0!} + B.\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_{= e^t} = id - B + B.e^t$$

Aufgabe 7.2

$$\exp(Bt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

$$\exp(Bt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$\exp((A+B)t) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$EW(A+B): \quad \det((A+B) - \lambda id) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

A+B ist nicht nilpotent

$$(1-\lambda)(-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 7.2

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (A+B)$$

$$(A+B)^n = (A+B), \quad n \geq 1$$

$$\exp((A+B)t) = id - (A+B) + (A+B) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_{= e^t}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^t$$

Aufgabe 7.2

$$\exp((A+B)t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \exp(Bt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(At)\,\exp(Bt) = \exp((A+B)t) \; ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & e^t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{}\overset{\exp((A+B)t)}{}$$

$$\boxed{\text{Wenn } AB = BA, \text{ dann gilt } \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)}$$

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h.,prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$
$$\Phi(0) = I$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).
2. $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).
4. Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).

Aufgabe 7.3

Berechnung der Transitionsmatrix (3)

3. Wenn die $n \times n$ Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ n linear unabhängige Eigenvektoren hat, kann sie mit Hilfe der aus den n Eigenvektoren gebildeten Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ auf Diagonalform transformiert werden:

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

Das transformierte homogene Zustandsmodell besteht aus n entkoppelten DGL der Form $\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t)$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1}$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind. Die zur Diagonalmatrix $\boldsymbol{J}$ gehörende Transitionsmatrix $e^{\boldsymbol{J}t}$ hat die leicht berechenbare Form

$$e^{\boldsymbol{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

Aufgabe 7.3

$$A = T^{-1} \Lambda T \Rightarrow A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = (\underbrace{T^{-1}\Lambda T)(T^{-1}}_{id}\Lambda \underbrace{T) \cdots (T^{-1}}_{id}\Lambda T)$$

$$= T^{-1} \Lambda^n T$$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = T^{-1} \left(\sum \frac{\Lambda^n t^n}{n!} \right) T$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

$$\exp(At) = T^{-1} \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^n \cdot t^n}{n!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum \frac{\lambda_2^n t^n}{n!} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sum \frac{\lambda_n^n t^n}{n!} \end{pmatrix} T = T^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{\exp(\Lambda t)} T$$

Aufgabe 7.3

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $EW(A) \to$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/2$ (A ist nicht nilpotent)

$-\lambda(1/2 - \lambda) - 1/2 = 0$.

$\underline{\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}}$,

$A = T^{-1} \Lambda T$

$T = [v_1 \;\; v_2]$

$\lambda_1 . (A - \lambda_1 . id) v_1 = 0 \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -v_{11} = -v_{12} \\ v_{11} = v_{12} \end{cases} \to \boxed{v_{11} = v_{12}} \xrightarrow{\boxed{v_{11}=1}} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 . (A - \lambda_2 . id) v_2 = 0 \to \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0$

$\to \underline{\underline{T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}$

$\Big\{ \frac{v_{21}}{2} = -v_{22} \xrightarrow{\boxed{v_{22}=1}} v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 7.3

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(At) = T \left(\sum \frac{\Lambda^n t^n}{n!} \right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\phi(t) = \exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + e^{t} & -2e^{-t/2} + 2e^{t} \\ -e^{-t/2} + e^{t} & e^{-t/2} + 2e^{t} \end{pmatrix}$$