Regelungstechnik

6. Übung

Victor Cheidde Chaim

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

WOK - Verfahren

WOK-Verfahren

Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der Wurzelort ist der geometrische Ort der Lösungen (Wurzeln) der charakteristischen Gleichung

$$\boxed{1 + G_0(s) = 0}$$

des geschlossenen Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die Wurzelortskurve (WOK) stellt die Abhängigkeit der Wurzelorte von einem Parameter (vielfach der Verstärkung K_0) des offenen Regelkreises dar.

$$\boxed{1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0} \Rightarrow$$

Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$\boxed{C(s) = N_0(s) + Z_0(s)}$$

Aufgabe 6.1

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und ein Regler mit Übertragungsfunktion $R(s)$,

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+4)^2}, \qquad R(s) = k.$$

Hier wird neben der Verstärkung k als Parameter aufgefaß.

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom von G_0. (Im Zusammenhang mit WOKn wird niemals gekürzt; bei mehr fachen Nullstellen ist die Vielfachheit anzugeben.)

$\boxed{m = 1}$

NS: $s+1 = 0 \rightarrow n_1 = -1 \rightarrow$ n und m

Pole: $s(s+2)(s+4)^2 = 0 \rightarrow p_1 = 0,\ p_2 = -2,\ p_3 = -4,\ p_4 = -4$

$\boxed{n = 4}$

Aufgabe 6.1

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten.

Pole NS

5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$n-m$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n-m$ Asymptoten.

Anzahl der Pole

$n = 4, m = 1 \Rightarrow \underline{n - m = 3} \Rightarrow 3$ Äste $\rightarrow \infty$

Anzahl der Nullstellen

Aufgabe 6.1

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten.

8	Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt σ_W)	Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse. $$\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m} \quad \text{für} \quad n-m \geq 2$$

$$\sigma_W = \frac{(-2) + (-4) + (-4) + 0 - (-1)}{3} = -3$$

Aufgabe 6.1

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten.

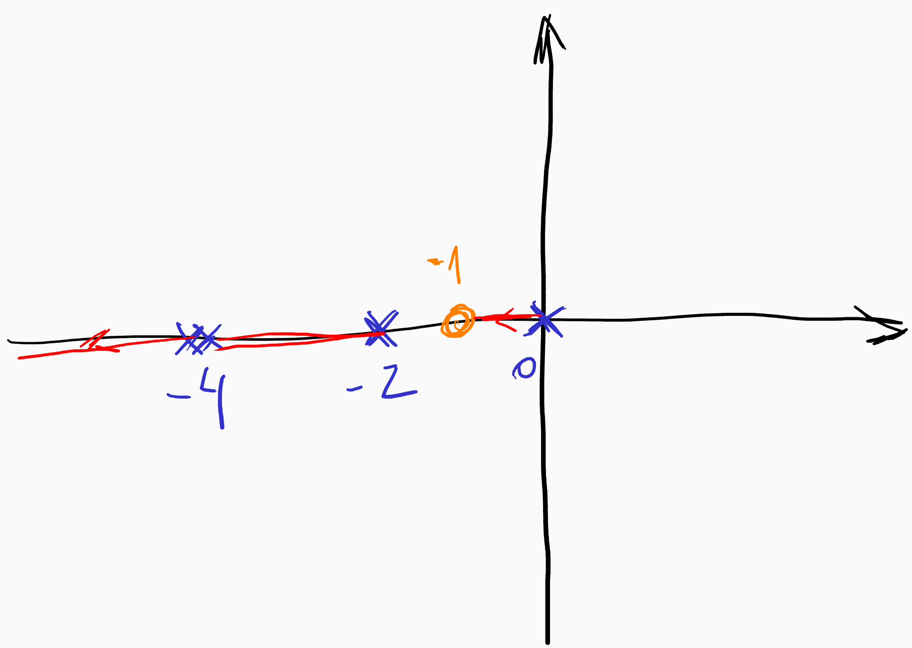
7	Winkel der Asymptoten	Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus $\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[\varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n-m.$

$$k = 1, 2, 3 \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \frac{(2-1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \\ \varphi_2 = \frac{(2 \cdot 2-1) \cdot \pi}{3} = \pi \\ \varphi_3 = \frac{(2 \cdot 3-1)\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad // \end{cases}$$

Aufgabe 6.1

(iii) Bestimmen die Intervalle der reellen Achse, die zur WOK gehören.

3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von Polen und Nullstellen ungerade [gerade]^2 ist, ist ein Wurzelort.



Pole: $-4, -4, -2, 0$

NS: -1

Intervall: $\langle -1, 0 \rangle, \langle -\infty, -2 \rangle$

Aufgabe 6.1

(iv) Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den vorangegangenen Teilaufgaben sowie ggf. weiterer Konstruktionsregeln die WOK.

10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	Allgemein gilt am Verzweigungspunkt a: $\frac{\mathrm{d}G_0(s)}{\mathrm{d}s}\Big\rvert_{s=a} = 0$ Für $a \neq p_i$ und $a \neq n_i$ gilt damit: a) reelle Pole und Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a-n_i}$

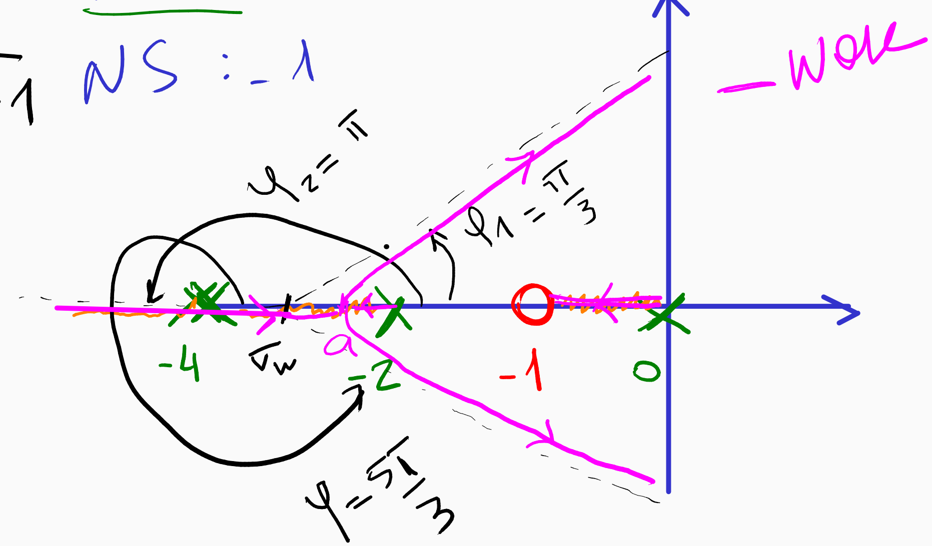
$$\frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a+1}$$

Pole: $-4, -4, -2, 0$

NS: -1

Reele Lösung:

$\Rightarrow \quad a \simeq -2{,}6$



Aufgabe 6.1

Intervalle: $\{-1,0\},\ \underbrace{\{4,-2\},\ \{-6-2\}}_{\{-6,-2\}}$

(v) Lösen die vorstehenden Aufgaben erneut, diesmal jedoch für die durch $R(s) = k(s+6)$ gegebene Übertragungsfunktion des Reglers.

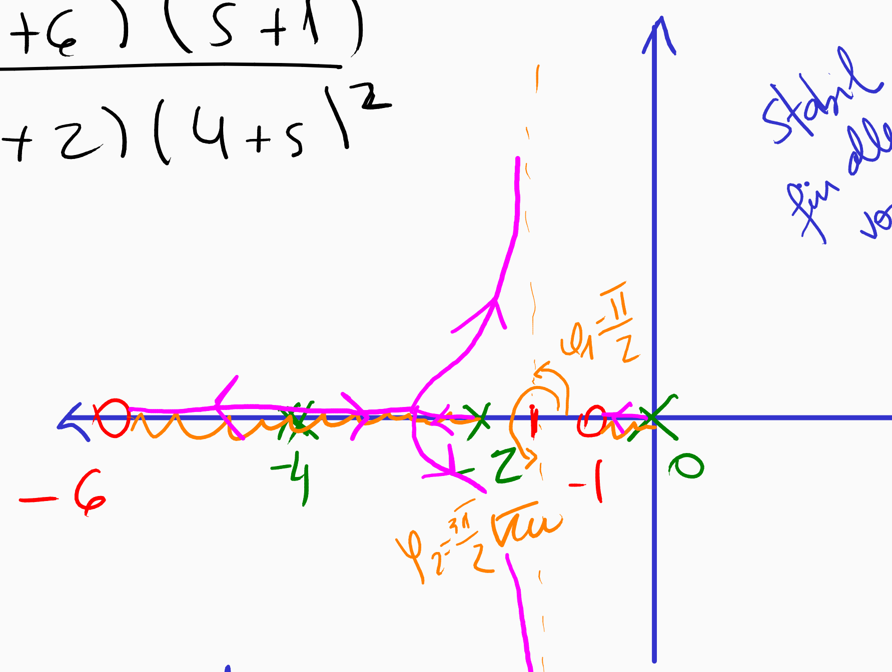
$$G_0(s) = R(s)\,G(s) = \frac{k(s+6)(s+1)}{s(s+2)(4+s)^2}$$

Pole: $-4, -4, -2, 0$, $n = 4$

NS: $-6, -1$, $m = 2$

$n - m = 2 \Rightarrow 2$ Äste $\to \infty$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \sigma_w = \frac{-4-4-2+6+1}{2} = -1{,}5$



Stabil für alle Werte von k!

Aufgabe 6.2

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$

$$G(s) = \frac{\alpha/3 + s}{s^2(s+3)},$$

Dabei ist α ein Parameter. Wie betrachten die Wurzelortskurve (WOK) unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h, eines P-Reglers mit positiver Verstärkung).

(i) Bestimmen Sie für alle drei Fälle, d.h., für $\alpha \in \{1, 5, 1/2\}$, jeweils alle Verzweigungspunkte der WOK.

(ii) Skizzieren Sie die WOK in allen drei Fällen.

Aufgabe 6.2

i) $G(s) = \dfrac{\alpha/3 + s}{s^2(s+3)}$, 1. Fall $\alpha = 1$

$G(s) = \dfrac{1/3 + s}{s^2(s+3)}$

NS: $-1/3$ $(m=1)$

PS: $0, 0, -3$ $(n=3)$

, $n-m = 2$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

Regel 10: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{3+a} = \dfrac{1}{1/3 + a} \Rightarrow \boxed{a = -1}$

Bedingung für WOK:

$1 + G_0 = 0 \Rightarrow \left(s + \frac{1}{3}\right)k + s^2(3+s) = 0$ für $s^2(3+s) \neq 0$

$\left(a + \frac{1}{3}\right)k + a^2(3+s) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}k + 1(2) = 0 \Rightarrow k = 3$

$k > 0$ ✓

Aufgabe 6.2

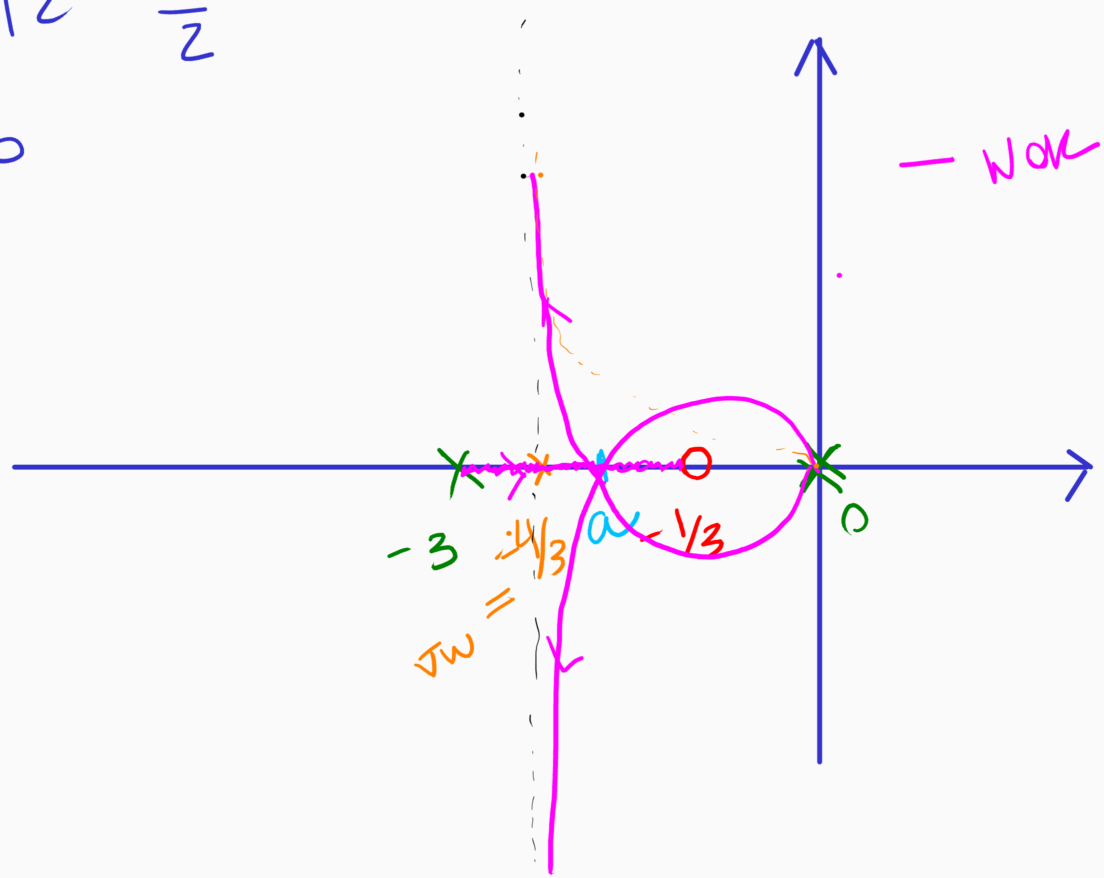
ii) $\alpha = 1, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$\sigma_W = -4/3 \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

2 Äste $\rightarrow \infty$

Pole: $-3, 0, 0$

NS: $-1/3$



Aufgabe 6.2

i) $\alpha = 5$ (2. Fall) Pole: $-3, 0, 0$

$$G(s) = \frac{5/3 + s}{s^2(s+3)}$$

NS: $-5/3$

$\sigma_W = -2/3$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \ \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{3+a} = \frac{1}{5/3 + a} \Rightarrow a = -2 \pm i$$

1. Bedingung: Ist a Teil der WOK?

$1 + G_0(s) = 0 \Rightarrow 1 + G_0(a) = 0 \Rightarrow K = 3 \pm 6i$ → kein reeller Wert

↳ kein Teil der WOK!

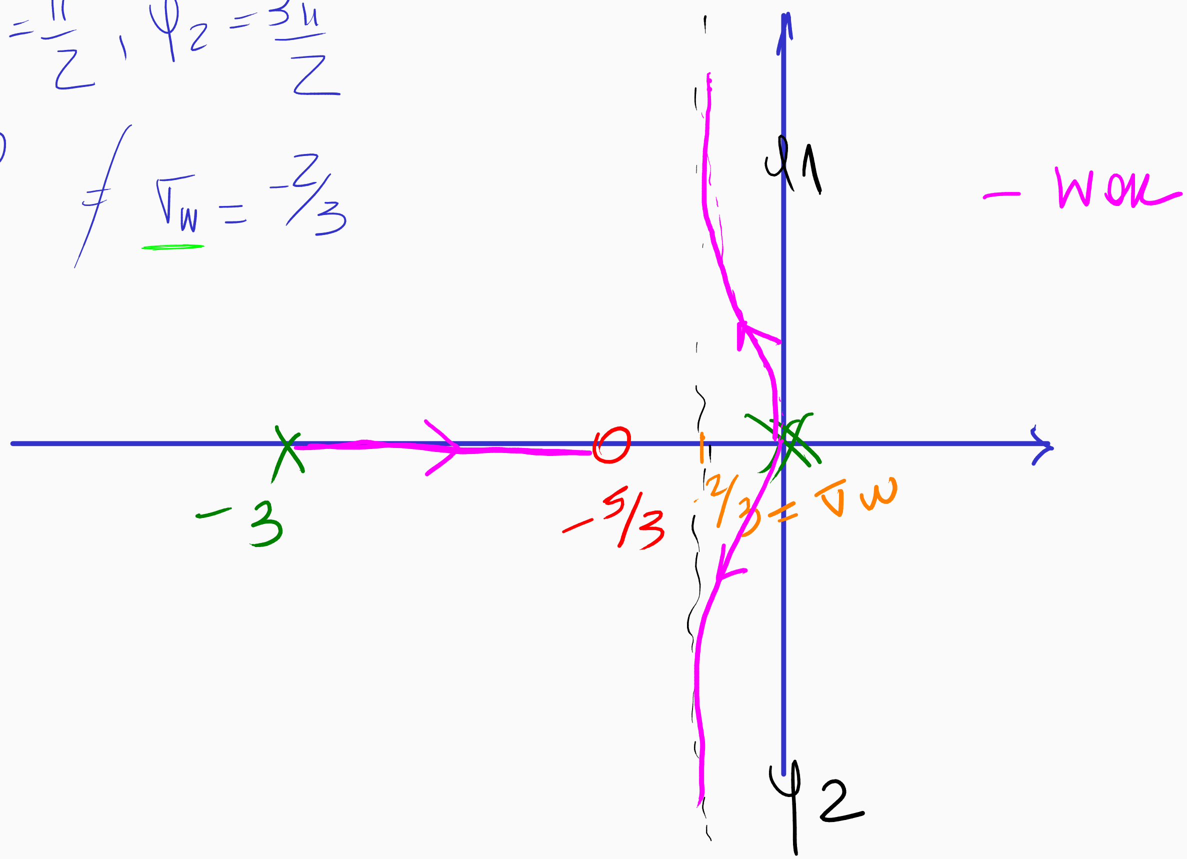
Aufgabe 6.2

ii) $\alpha = 5$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

Pole: $-3, 0, 0$

NS: $-5/3$

$\Rightarrow \sigma_W = -2/3$



Aufgabe 6.2

i) 3. Fall) $\alpha = \frac{1}{2}$, Pole: $-3, 0, 0$

NS: $-\frac{1}{6}$

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{6}+s\right)}{s^2(s+3)}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{3+a} = \frac{1}{\frac{1}{6}+a} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \approx -1{,}4 \\ a_2 \approx -0{,}36 \end{cases}$$

Teil der WOK?

$$1+G(a) = 0 \rightarrow \quad k_1 = \frac{3(222+43\sqrt{17})}{16(17+3\sqrt{17})} > 0 \checkmark$$

Ja!

$$k_2 = \frac{3(-221+43\sqrt{17})}{16(-17+3\sqrt{17}} > 0 \checkmark$$

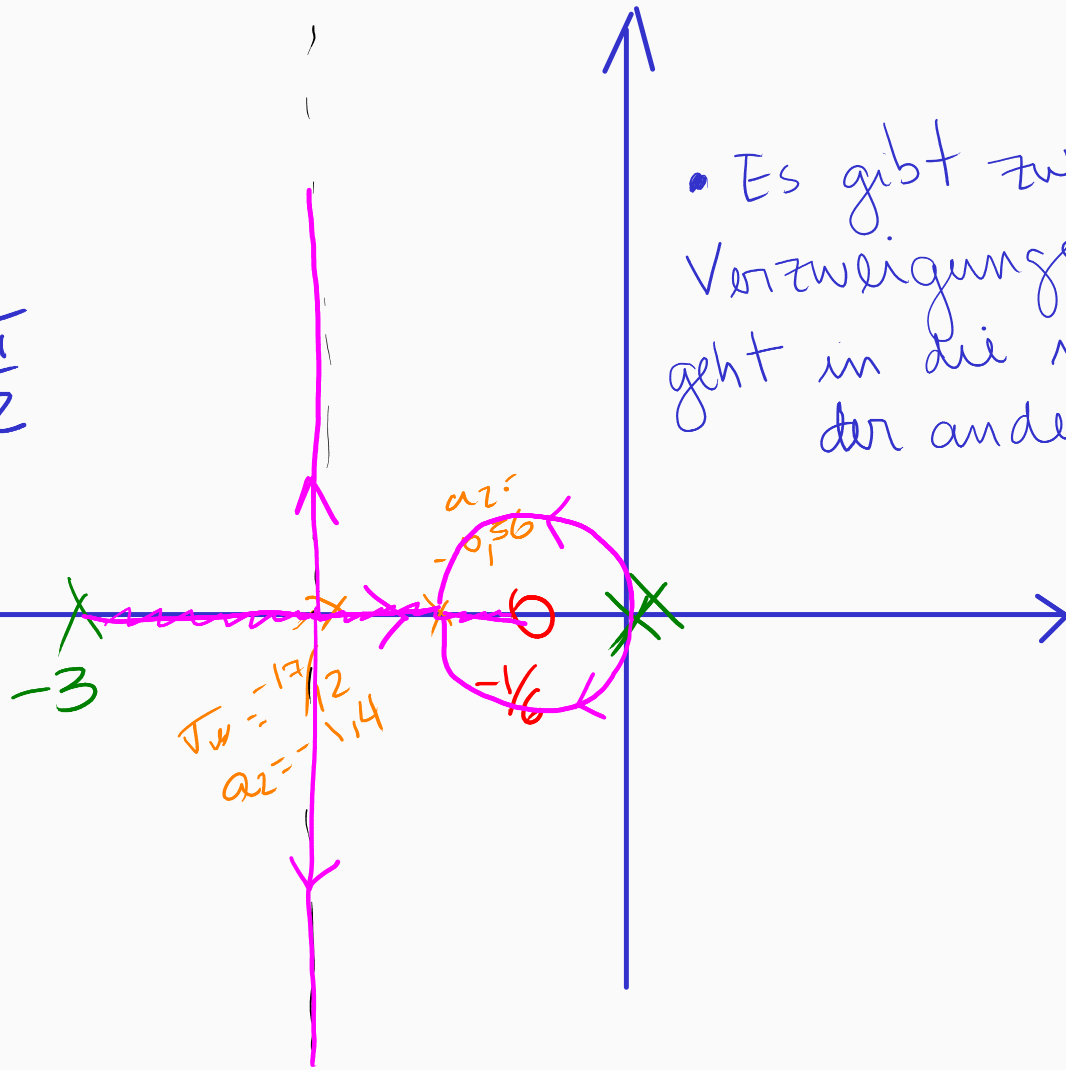
Aufgabe 6.2

$$\begin{cases} a_1 \approx -1{,}4 \\ a_2 \approx -0{,}36 \end{cases}$$

Pole: $-3, 0, 0$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \ \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

NS: $-1/6$



- Es gibt zwei Verzweigungspunkte, einer geht in die reale Achse und der andere geht aus.

Aufgabe 6.3

i)
Bedingung: $-10 < -\frac{1}{k} < -1$

ii)
Bedingung: $10 > -\frac{1}{k} > 1$

iii)
Bedingung: $-10 < -\frac{1}{k} < 10$

iv)
Bedingung: $-\frac{1}{k} < 10$

v)
Bedingung: $-\frac{1}{k} < -10$

vi)
Bedingung: $-\frac{1}{k} < -10 \;||\; -\frac{1}{k} > 10$

Aufgabe 6.3

i) $-10 < -\frac{1}{k} < -1 \quad (\cdot -1) \Rightarrow 10 > 1/k > 1 \quad (\,)^{-1} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{10} < k < 1}$$

ii) $10 > -1/k > 1 \rightarrow -10 < 1/k < -1 \Rightarrow$

$$\boxed{-\frac{1}{10} > k > -1}$$

iii) $-10 < -1/k < 10$, $k > 0$ $\rightarrow$ $-10 < -1/k$

$10 > 1/k$

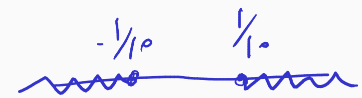
$1/10 < k$

$k < 0 \rightarrow -1/k < 10$

$1/k > -10$

$k < -1/10$

$\Rightarrow \frac{1}{10} < k \;||\; k < \frac{-1}{10}$ ✓



iv) $-1/k < 10$, $k > 0$ ✓

$-1/k < 10$, $1/k > -10$

$k < -1/10 \;||\; k > 0$ ✓

Aufgabe 6.3

v) $-\frac{1}{k} < -10$ $\quad$ $\boxed{k > 0 \\ \text{und} \\ k < 1/10}$

$\frac{1}{k} > 10 \Rightarrow k < 1/10$ ✓

vi) $\underbrace{-\frac{1}{k} < -10}_{k>0} \quad || \quad \underbrace{-\frac{1}{k} > 10}_{k<0}$

$1/k > 10 \qquad 1/k < -10 \Rightarrow \underline{0 < k < 1/10 \;||\; -1/10 < k < 0}$ ✓

$k < 1/10 \qquad k > -1/10$