Universität der Bundeswehr München

Regelungstechnik

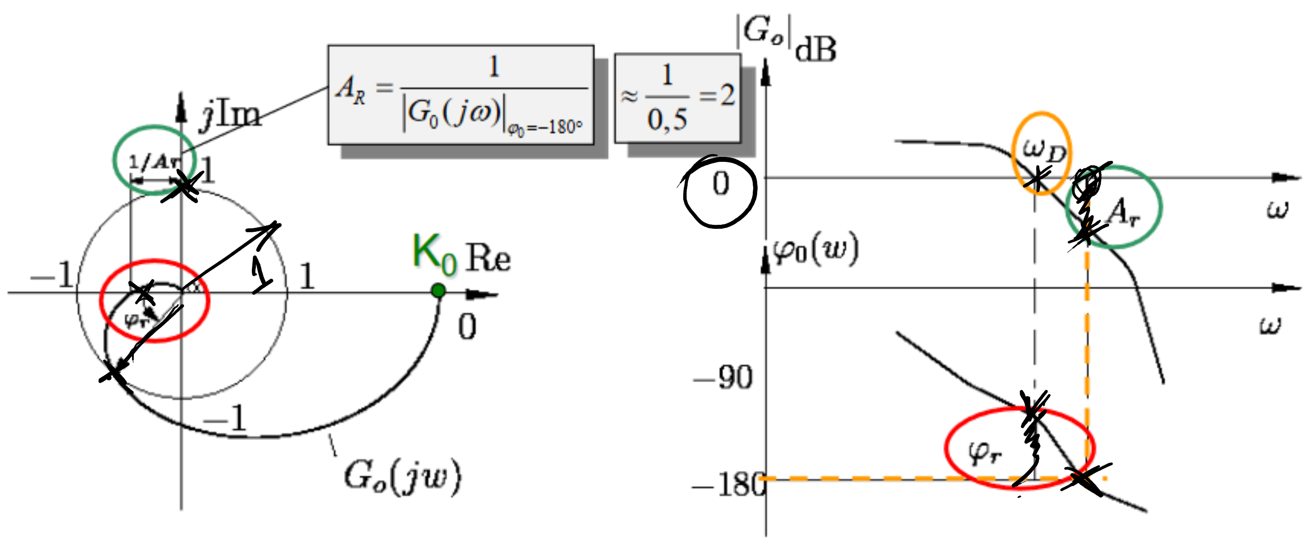
5. Übung

Victor Cheidde Chaim

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Stabilitätsreserve

Stabilitätsreserve (2)



Amplituden- und Phasenrand in der Ortskurvendarstellung

Amplituden- und Phasenrand im Bode-Diagramm

Durchtrittsfrequenz ω_D: Frequenz, bei der die Amplitudenkennlinie die 0-dB-Linie schneidet.

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Regelungstechnik

Stabilitätsreserve (3)

Definition 2.3 : Amplituden– und Phasenrand

1. Der Phasenrand

$$\varphi_R = 180^\circ + \varphi(\omega_D)$$

ist der Abstand der Phasenkennlinie von der -180°–Geraden bei der Durchtrittsfrequenz ω_D, d. h. beim Durchgang der Amplitudenkennlinie durch die 0–dB–Linie ($|G_0| = 1$).

2. Als Amplitudenrand

20 log$_{10}$ 1 – 20 log$_{10}$ |G$_0$|

$$A_R = \frac{1}{|G_0|}\Big|_{\varphi_0=-180^\circ} \; ; A_{R_{dB}} = -\,|G_0|_{dB}\,\Big|_{\varphi_0=-180^\circ}$$

wird der Abstand der Amplitudenkennlinie von der 0–dB–Linie beim Winkel $\varphi_0 = -180^\circ$ bezeichnet. □

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Regelungstechnik

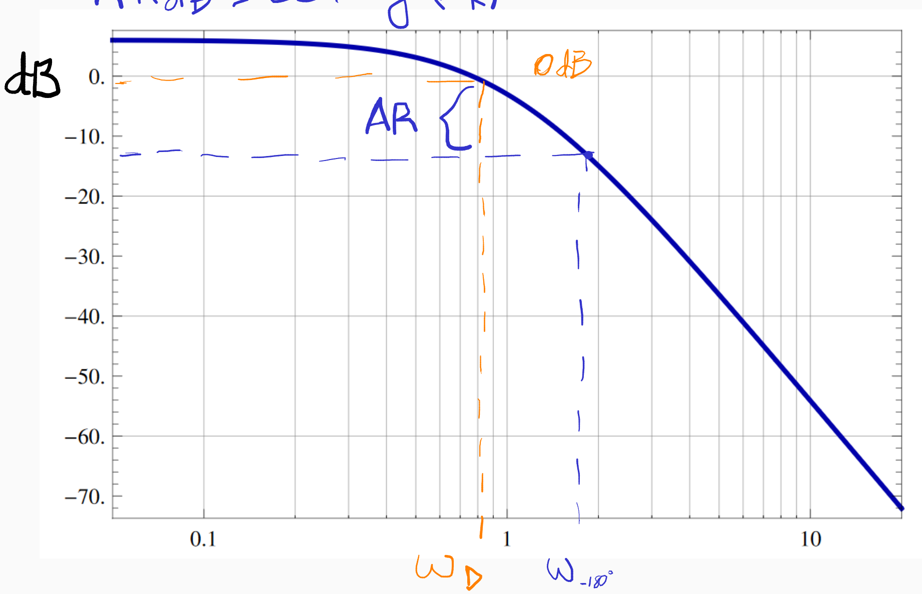
Aufgabe 5.1

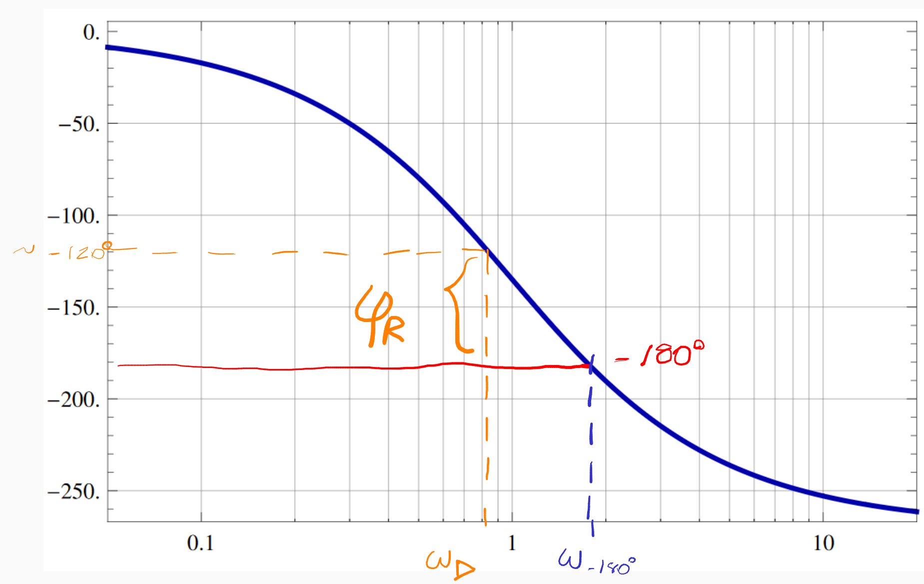
Für die unten als Bode-Diagramm skizzierte Übertragungsfunktion gebe man Amplituden- und Phasenrand an. Für welche Reglerverstärkungen ist der geschlossene Kreis stabil?

- $\varphi_R = 180° + \varphi(\omega_D) \hat{=} 60° > 0$ ✓

- $A_{R\,dB} = -|G_o|_{dB}|_{\varphi_o = -180°} \hat{=} 12\,dB$

$A_{R\,dB} = 20 \log(A_R) \Rightarrow A_R = 10^{\frac{A_{R\,dB}}{20}} = 10^{\frac{12}{20}} \hat{=} 4 > 0$ ✓





Reglerverstärkung: $K < 4 \rightarrow$ gesch. Kreis stabil ✓

$K \cdot G_o$ $\quad$ ↳ A_R

WOK-Verfahren

Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der Wurzelort ist der geometrische Ort der Lösungen (Wurzeln) der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0$$

des geschlossenen Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die Wurzelortskurve (WOK) stellt die Abhängigkeit der Wurzelorte von einem Parameter (vielfach der Verstärkung K_0) des offenen Regelkreises dar.

$$1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0$$

Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$\boxed{C(s) = N_0(s) + Z_0(s)}$$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Regelungstechnik

Aufgabe 5.2

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und ein PI-Regler mit Übertragungsfunktion $R(s)$,

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad R(s) = k\left(\frac{1}{sT} + 1\right).$$

Hier wird neben der Verstärkung k auch die Zeitkonstante $T > 0$ als Parameter aufgefaßt und die WOK für feste Werte von T betrachtet.

(i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion G_0 des offenen Kreises in Pol-Nullstellen-Form.

$$G_0(s) = G(s)\,R(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot k\left(\frac{1}{sT} + 1\right)$$

$$= \frac{k\left(\frac{1}{T} + s\right)}{(s+1)(s+2)\,s} \quad //$$

Aufgabe 5.2

(ii) Bestimmen Sie die Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom von G_0. (Im Zusammenhang mit WOKn wird niemals gekürzt; bei mehr fachen Nullstellen ist die Vielfachheit anzugeben.)

$$G_0(s) = \frac{k\left(1/T + s\right)}{(s+1)(s+2)\,s}$$

Pole: $(s+1)(s+2)s = 0 \rightarrow \begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \\ p_3 = 0 \end{array}$ //

NS: $k\left(1/T + s\right) = 0 \rightarrow n_1 = -1/T$ //

Aufgabe 5.2

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten, jeweils in Abhängigkeit von T.

n = Anzahl der Pole
m = Anzahl der Nullstellen

5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$\overset{3}{n} - \overset{1}{m}$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n - m$ Asymptoten.

Anzahl der Äste im ∞ $\Rightarrow$ $n - m = 3 - 1 = 2$ Äste $\to \infty$

Aufgabe 5.2

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten, jeweils in Abhängigkeit von T.

8	Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt σ_W)	Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse. $\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m}$ für $n - m \geq 2$

$$\sigma_W = \frac{(-1)+(-2)+0-(-1/T)}{2} = 0{,}5\left(-3+\frac{1}{T}\right)$$

Aufgabe 5.2

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Äste der WOK, die gegen ∞ laufen, den Wurzelschwerpunkt und die Winkel der Asymptoten, jeweils in Abhängigkeit von T.

7	Winkel der Asymptoten	Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus $$\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[\varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n-m.$$

$$k = 1, 2 \quad (n - m = 2) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{(2-1)\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi_2 = \dfrac{(4-1)\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

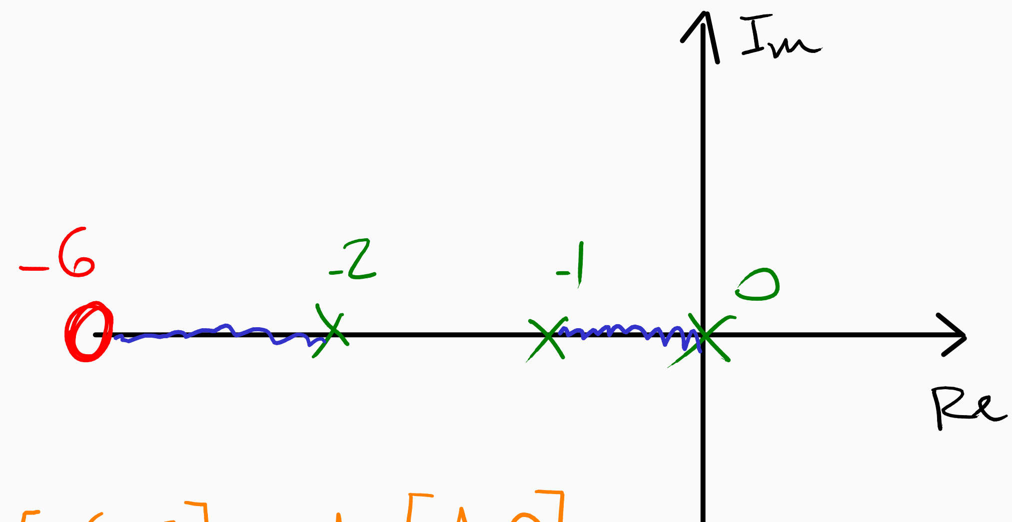
Aufgabe 5.2

(iv) Bestimmen Sie für den Fall $T = 1/6$ die Intervalle der reellen Achse, die zur WOK gehören.

3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von Polen und Nullstellen ungerade [gerade]^2 ist, ist ein Wurzelort.

Pole: $0, -1, -2$

NS: $-1/T$, $T = \frac{1}{6} \Rightarrow -6$



Interval $[-6, -2]$ und $[-1, 0]$

Aufgabe 5.2

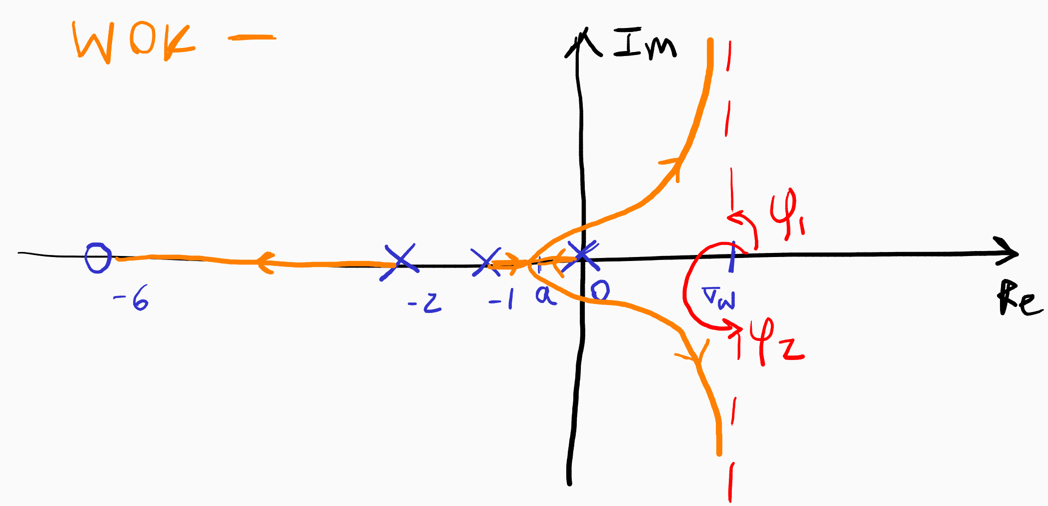
(v) Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den vorangegangenen Teilaufgaben sowie ggf. weiterer Konstruktionsregeln die WOK für den Fall $T = 1/6$.

10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	Allgemein gilt am Verzweigungspunkt a: $\frac{\mathrm{d}G_0(s)}{\mathrm{d}s}\Big\rvert_{s=a} = 0$ Für $a \neq p_i$ und $a \neq n_i$ gilt damit: a) reelle Pole und Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a-n_i}$

$$\Rightarrow T = 1/6, \quad \sigma_W = 0{,}5\left(-3 + \frac{1}{T}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a+6}$$

$\hookrightarrow a \cong -0{,}4$

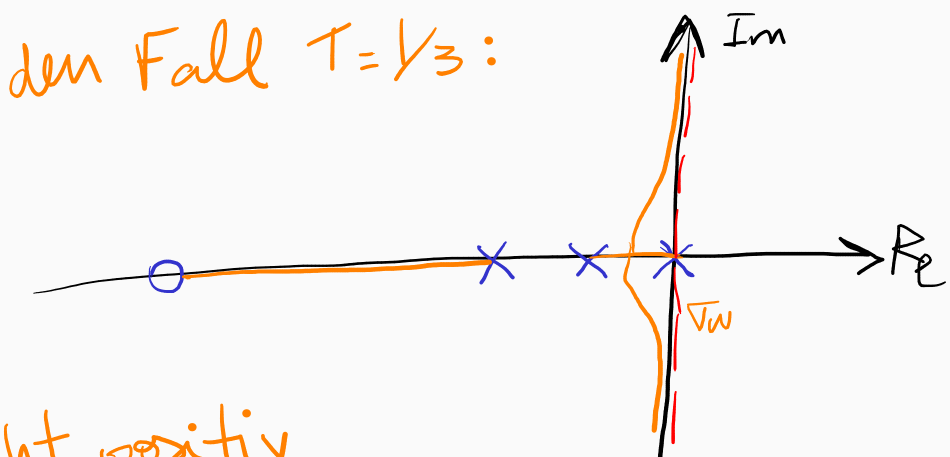


(vi) Die Zeitkonstante T des Integralanteils des Reglers soll nun so vergrößert werden, daß der geschlossene Kreis für alle $k > 0$ stabil ist: Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von (iii) den minimalen Wert für T_0 derart, daß für alle $T > T_0$ der Wurzelschwerpunkt negativ ist.

$\sigma_W < 0$: $\quad \sigma_W = 0{,}5\left(-3 + \frac{1}{T}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2T} < 0$

$\frac{1}{2T} < \frac{3}{2}$, $T > \frac{1}{3}$, $T_0 = \frac{1}{3}$. $\boxed{T < 0 \;\|\; T > \frac{1}{3}}$

Für den Fall $T = 1/3$:



Re(WOK) nicht positiv.

Aufgabe 5.3

Gegeben sei eine Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s)$

$$G(s) = \frac{K\, s}{(s+3)(s+4)(s-4)}.$$

$Re(p) > 0 \rightarrow$ instabil

Ziel der Regelung ist Stabilität des geschlossenen Kreises.

(i) Skizzieren Sie die WOK unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h., eines P-Reglers). Für welche Reglerverstärkungen ist der geschlossene Kreis stabil?

$a \Rightarrow \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a-4} = \frac{1}{a} \rightarrow a \approx -3{,}5$

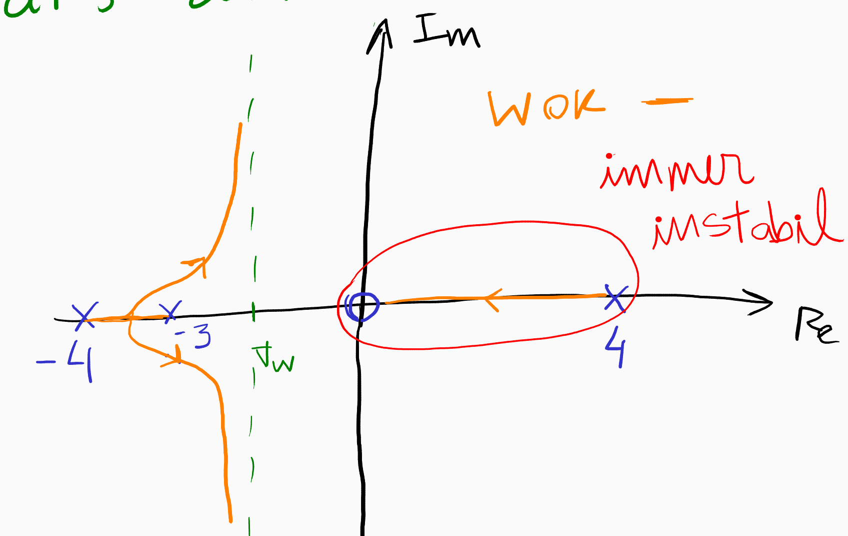
Pole: $-3, -4, 4$, NS: 0

$n - m: 3 - 1 = 2$

$\varphi_1 = \pi/2$

$\varphi_2 = 3\pi/2$

$$\sigma_w = \frac{-3-4+4-0}{2} = -\frac{3}{2}$$



Aufgabe 5.3

(i) Skizzieren Sie die WOK unter Verwendung eines statischen linearen Reglers (d.h., eines P-Reglers). Für welche Reglerverstärkungen ist der geschlossene Kreis stabil? Für keinen Wert von K.

<u>Immer instabil.</u>

Aufgabe 5.3

(ii) Verändern Sie die WOK durch Einfügen eines reellen Pols und einer reellen Nullstelle so, daß der geschlossene Kreis für wenigstens eine Reglerverstärkung stabil ist. Die Übertragungsfunktion R des Reglers ist also gegeben durch

$$R(s) = k\frac{s - s_2}{s - s_1},$$

und die Parameter k, s_1 und s_2 sollen geeignet bestimmt werden. (Machen Sie sich klar, wo s_1 und s_2 ungefähr platziert werden müssen, und benutzen Sie danach einen Rechner und eine Software Ihrer Wahl.)

RT-Website:
↳ Matlab:
"WOK_Aufgabe4p3_Matlab.zip"

Vorueberlegungen: Wie waehlt man s_1, s_2?

s_1:
- Intervall [0,4] auf reeller Achse stoert; in $[0,\infty[$ darf kein vollstaendiger Astder WOK liegen
- nur zu erreichen durch $s_1 > 0$
- je groeszer s_1, desto groeszer Wurzelschwerpunkt (grosz = schlecht fuer Stabilitaet)

s2:
- je groeszer s_2, desto kleiner Wurzelschwerpunkt (klein = gut)
- s_2 darf nicht rechts von $\min\{4, s_1\}$ liegen, denn sonst wiederum vollstaendiger Ast der WOK in $[0,\infty[$
- 1. Fall: $0 <= s_2 <= \min\{4, s_1\}$: koennte klappenaber WOK koennte auch beide Intervalle verbinden; wir probieren es nicht aus

- 2. Fall: $s_2 < 0$: Wie s_1, s_2 waehlen, damit Wurzelschwerpunkt negativ?
$\sigma_w = (-3 + s_1 - s_2)/2 < 0 \iff s_1 < s_2 + 3 < 3$

Jetzt einige werte ausprobieren, zB s_1=1/2, s_2= -2

Nützliche Matlab-Funktion:
→ rlocus
→ sisotool