# Regelungstechnik

## 9. Übung

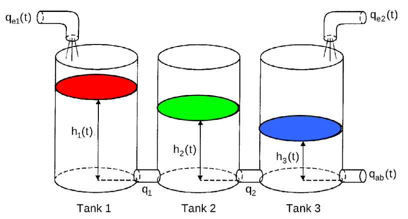
Victor Cheidde Chaim

15. März 2021

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

# Aufgabe 6.1

Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern. $F$ bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit) $q_{e1}$ bzw. $q_{e2}$, aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz $q_{ab}$ ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände h1, h2, h3 (das sind also die Ausgänge).




Gesetz von Torricelli:

$$q_{ab} = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3},$$

$$q_i = \mu\sqrt{2g}\,sign(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|},$$

sowie $g,\ \mu,\ F > 0,\ q_{ei} \geq 0,\ h_i \geq 0.$

# Aufgabe 9.1

Betrachtet wird das Zustandsraumsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit den Werten für $A$, $B$, $C$ und $D$, die in Aufgabe 6.2 berechnet wurden. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer Linearisierung in der Ruhelage mit $q_{e1} = q_{e2} = 1/2$ und geeigneten $h_i$.

(i) Betrachten Sie die Linearisierung mit nur einem Eingang, $\Delta q_{e1}$, und bestimmen Sie eine lineare Zustandsrückführung derart, daß das char. Polynom des geschlossenen Regelkreises die Nullstellen $-1$, $-2$ und $-3$ besitzt.

# Zustandsrückführung (3)

**Modell der Regelstrecke:**

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}[z(t) + u(t)]\\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

**Durch Einsetzen des Regelgesetzes**

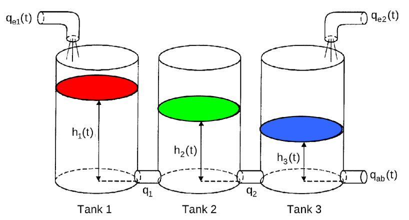
$$u(t) = -\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}(t)$$

**erhält man das Zustandsmodell des geschlossenen Kreises:**

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T\right]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}z(t)\\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

Systemmatrix $\mathbf{A}_G$ des geschlossenen Kreises

# Aufgabe 9.1




$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} & 0 \\ \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{1}{u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{2u_{0,1}+u_{0,2}}{2u_{0,1}(u_{0,1}+u_{0,2})} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cancel{C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}, D = 0$$

$C = [0 \quad 0 \quad 1]$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit Ruhelage: $u_0 = [0,5 \quad 0,5]$

$y_0 = [h_{0,1} \quad h_{0,2} \quad h_{0,3}]$.

# Aufgabe 9.1

(i) Ruhelage : $u_0 = [0{,}5 \;\; 0{,}5] \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \cancel{2}=1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$

Soll-Polynom in s: $(1+s)(2+s)(3+s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

Rückführungsvektor: $k = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]$

Charakteristisches Polynom von A+Bk in s:

$$\underbrace{\frac{1}{2} - 2k_1 - \frac{3k_2}{2} - k_3}_{=6} + \underbrace{\left(\frac{9}{\cancel{3}\,2} - \frac{7k_1}{2} - k_2\right)}_{=11} s + \underbrace{\left(\frac{9}{2} - k_1\right)}_{=6} s^2 + s^3$$

# Aufgabe 9.1

(i) Als lineares Gleichungssytem in Standard-Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 7/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ -13/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Lösung: $k = [-3/2, -5/4, -5/8]$

# Aufgabe 9.1

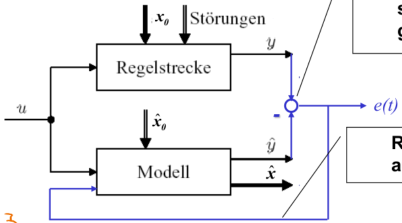
(ii) Betrachten Sie die Linearisierung mit nur einem Ausgang, $\Delta h_3$, und bestimmen Sie einen Beobachter, der $-5$ als dreifachen Eigenwert besitzt.

# Beobachterentwurf (5)

## Grundidee des Beobachters (2)

**Gemessene Regelgröße *y(t)* wird bisher nur zur Rekonstruktion des Anfangswertes verwendet.**

## Idee von Luenberger 1964:




**Kontinuierliche Berechnung der Differenz zwischen gemes-sener und simulierter Regel-größe.**

**Rückführung dieser Differenz auf den Eingang des Modells.**

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

(ii) Lösung über Koeffizientenvergleich zwischen char. Polynom des Beobachters in Abhängigkeit der Beobachterrückführung und Soll-Polynom:

- char. Polynom von $A - \ell c^T$ = char. Polynom von $A^T - c\ell^T$

→ selber Lösungsweg wie bei Zustandsrückführung mit $A_1^T, c_1, \ell^T$ anstelle von $A, b, k$.

Soll-Polynom in $s$: $(5+s)^3 = 125 + 75s + 15s^2 + s^3$

Beobachterrückführung: $\ell = [\ell_1, \ell_2, \ell_3]$

(ii) Char. Polynom von $A^T - l C^T$ in $s$:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+l_1+l_2+l_3}_{=125}+\underbrace{\left(\frac{9}{2}+l_2+3l_3\right)}_{=75}s+\underbrace{\left(9/2+l_3\right)}_{=15}s^2+s^3$$

Als lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -249/2 \\ -141/2 \\ -21/2 \end{pmatrix} \Rightarrow l=\left[75, 39, 21/2\right]$$

# Aufgabe 9.1

(iii) Verifizieren Sie numerisch mit Software Ihrer Wahl, daß der Beobachter aus (ii) die Zustände $\Delta h_1$ und $\Delta h_2$ der Linearisierung tatsächlich beobachtet. Wählen Sie dazu $\Delta u_1(t) = t/10$, $\Delta u_2(t) = 0$, $\Delta h(0) = (-0.1, 0.2, 0.1)$ und $\Delta\hat{h}(0) = (0, 0, 0)$. ($\Delta\hat{h}$ ist der Beobachterzustand.)

Eingangssignal: $u(t) = t/10$

Strecke: $x_1'(t) = t/10 - x_1(t) + x_2(t)$

$x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t)$

$x_3'(t) = x_2(t) - \frac{3}{2} x_3(t)$

# Aufgabe 9.1

(iii) Beobachter:

$$\hat{x}_1'(t) = \frac{y}{10} - \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + 75\left(x_3(t) - \hat{x}_3(t)\right)$$

$$\hat{x}_2'(t) = \hat{x}_1(t) - 2\hat{x}_2(t) + 39\left(x_3(t) - \hat{x}_3(t)\right) + \hat{x}_3(t)$$

$$\hat{x}_3'(t) = \hat{x}_2(t) + \frac{21}{2}\left(x_3(t) - \hat{x}_3(t)\right) - \frac{3\hat{x}_3(t)}{2}$$

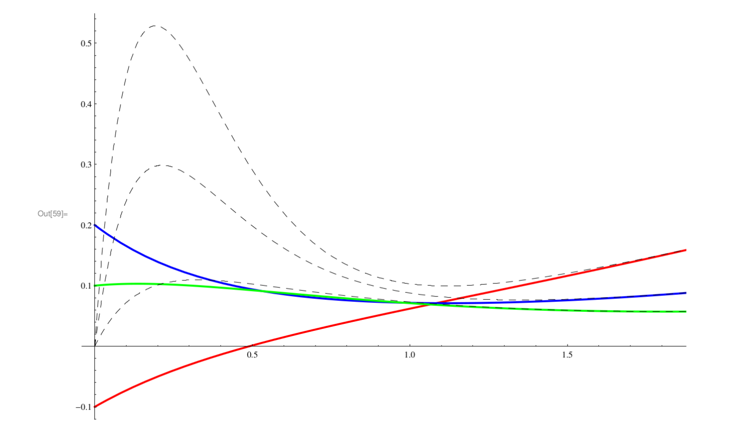
Anfangsbedingung:

$x_1(0) = -0{,}1$ $\quad\hat{x}_1(0) = 0$

$x_2(0) = 0{,}2$ $\quad\hat{x}_2(0) = 0$

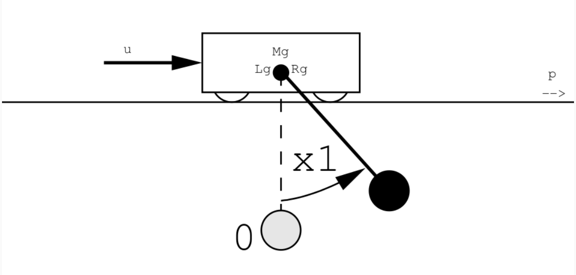
$x_3(0) = 0{,}1$ $\quad\hat{x}_3(0) = 0$

# Aufgabe 9.1



# Aufgabe 9.2

Betrachtet werde ein auf einem Wagen drehbar befestigter Stab der Länge $L$; siehe Abbildung. Der Stab ist masselos, trägt an seinem Ende eine Punktemasse $m$, und bewegt sich in einer Ebene unter Einfluß der Fallbeschleunigung $g$ und der Beschleunigung $u$ des Wagens. Die Beschleunigung $u$ des Wagens wird dabei als Eingang betrachtet; die Reibung im Gelenk des Stabes ist viskos mit Reibungskoeffizient $\rho$. Für die Parameter nehmen wir $L > 0$, $m > 0$, $g > 0$ und $\rho \geq 0$ an.

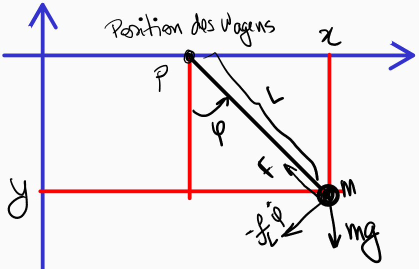


# Aufgabe 9.2

(i) Modellieren Sie die Bewegung des Stabes in Zustandsform

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = g(x, u)$$

mit dem Zustand $x = (\varphi, \dot{\varphi})$, dem Ausgang $\varphi$ und dem Eingang $u$.




Eigene Trägheit:

$$\dot{x} = \dot{p} + L\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$
$$\ddot{x} = \ddot{p} + L(-\sin(\varphi)(\dot{\varphi})^2 + \cos(\varphi)\ddot{\varphi})$$
$$\dot{y} = L\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$
$$\ddot{y} = L(\cos(\varphi)(\dot{\varphi})^2 + \sin(\varphi)\ddot{\varphi})$$

Geometrie:

$$x = p + L\sin(\varphi)$$
$$y = -L\cos(\varphi)$$

# Aufgabe 9.2

(i) • Moment im Gelenk: $-\rho\dot{\varphi}$ (Reibung im Gelenk)

Kraft auf m: $\frac{\rho}{L}\dot{\varphi}\,(-\cos(\varphi), -\sin(\varphi))$

• Stabkraft: $F\,(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$

• Gewichtskraft: $(0, -mg)$

$\Rightarrow$ Kraftgleichgewichte:

horizontal: $m\ddot{p} + mL\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - mL\sin(\varphi)(\dot{\varphi})^2 = -\frac{\rho}{L}\dot{\varphi}\cos(\varphi) - F\sin(\varphi)$ (1)

vertical: $mL\cos(\varphi)(\dot{\varphi})^2 + mL\sin(\varphi)\ddot{\varphi} = -\frac{\rho}{L}\dot{\varphi}\sin(\varphi) + F\cos(\varphi) - mg$ (2)

Gewichtete Addition beide Gleichungen: $\cos(\varphi)\cdot(1) + \sin(\varphi)\cdot(2)$:

# Aufgabe 9.2

(i) ("$c$" $= \cos(\varphi)$, "$s$" $= \sin(\varphi)$)

$$m\ddot{p}c + mLc^2\ddot{\varphi} - \cancel{mLsc(\dot{\varphi})^2} + \cancel{mLsc(\dot{\varphi})^2} + mLs^2\ddot{\varphi} =$$

$$= -\frac{f}{L}\dot{\varphi}c^2 - \cancel{Fsc} - \frac{f}{L}\dot{\varphi}s^2 + \cancel{Fsc} - mgs$$

$$\Rightarrow m\ddot{p}\cos(\varphi) + mL\ddot{\varphi} = -\frac{f}{L}\dot{\varphi} - mg\sin(\varphi) \;//$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\sin(\varphi) - \frac{f}{mL^2}\dot{\varphi} - \ddot{p}\frac{1}{L}\cos(\varphi) \quad , \quad x_1 := \varphi \,,\; x_2 := \dot{\varphi} \,,\; u := \ddot{p} \,:$$

$$\left|\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{f}{mL^2}x_2 - u\frac{\cos(x_1)}{L} \\ y &= x_1 \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$ Also: $g(x,u) = x_1$,

$$f(x,u) = \left(x_2,\; -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{f}{mL^2}x_2 - \frac{u}{L}\cos(x_1)\right) \;//$$

# Aufgabe 9.2

(ii) Bestimmen Sie alle Ruhelagen $(x, u)$.

Ruhelagen: $(x_0, u_0) \Rightarrow \dot{x} = 0$

$$\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow g \sin(x_1) + u \cos(x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\cos(x_1) = 0 \wedge x_1 \in \pi\mathbb{Z}\right)}_{\text{unmöglich}} \vee \left(\cos(x_1) \neq 0 \wedge \tan(x_1) = -\frac{u}{g}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(x_1) = -u/g \quad //$$

Ruhelage: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid \tan(x_1) = -u/g\}$

# Aufgabe 9.2

(ii) Speziell RL der Form $(x_1, 0)$:

$(x_1, 0)$ RL $\Longleftrightarrow \sin(x_1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 \in \pi\mathbb{Z}$

# Aufgabe 9.2

(iii) Linearisieren Sie das System in den Ruhelagen. Berechnen Sie also die Matrizen

$$A := D_1 f(x, u), B := D_2 f(x, u), C := D_1 g(x, u), D := D_2 g(x, u)$$

für alle in (ii) bestimmten Ruhelagen $(x, u)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x_1) + \frac{u}{L}\sin(x_1) & -\frac{f}{mL^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L}\cos(x_1) \end{pmatrix}$$

$$C = (1, 0), \quad D = 0$$

## Aufgabe 9.2

(iii) $A_{21} = -\frac{g}{L}\cos(x_1) + \frac{u}{L}\sin(x_1)$

$\sin(x_1) = -\frac{u}{g}\cos(x_1)$ (aus Teilaufgabe (ii))

$A_{21} = -\frac{1}{gL}(g^2+u^2)\cos(x_1)$ //

$x_1 \in \arctan\left(\frac{-u}{g}\right) + \pi\mathbb{Z}, \quad \cos(\arctan(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

# Aufgabe 9.2

(iii) $$A_{21} = -\frac{g^2+u^2}{gL} \frac{\operatorname{sign}(\cos(x_1))}{\sqrt{1+(u/g)^2}} = -\frac{g^2+u^2}{L} \cdot \frac{\operatorname{sign}(\cos(x_1))}{\sqrt{g^2+u^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{g^2+u^2}}{L} \operatorname{sign}(\cos(x_1)) = -\frac{g}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2} \operatorname{sign}(\cos(x_1))$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2} \operatorname{sign}(\cos(x_1)) & -\frac{f}{mL^2} \end{pmatrix},$$

(iv) Ermitteln Sie für jede der Ruhelagen, für welche Parameterwerte die entsprechende Linearisierung asymptotisch stabil ist, und für welche Parameterwerte die entsprechende Linearisierung BIBO-stabil ist.

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ g\frac{\operatorname{sign}(\cos(x_1))}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2} & s + \frac{f}{mL^2} \end{pmatrix}$$

$$= s^2 + s\frac{f}{mL^2} + \operatorname{sign}(\cos(x_1))\frac{g}{L}\sqrt{1+\left(\frac{u}{g}\right)^2}$$

# Aufgabe 9.2

(iv) Hurwitz-Kriterium für 2x2 Matrizen:

$$\text{asy. stab.} \Leftrightarrow \rho > 0 \;\wedge\; \cos(x_1) > 0$$

* Spezialfall $u = 0$:

$x_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$:  : $\cos(x_1) = 1$, asy. stab $\Leftrightarrow \rho > 0$

$x_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$:  : $\cos(x_1) = -1 \Rightarrow$ nicht asy. stab.

# Aufgabe 9.2

(iv) BIBO - Stabilität:

1\. Fall: $\cos(x_1) > 0 \wedge \rho > 0$: BIBO-stabil (da asy. stab.)

2\. Fall: $\rho = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha = -\frac{g}{L}\sqrt{1 + (u/g)^2}\,\operatorname{sign}(\cos(x_1)) \neq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ wobei } \beta = -\frac{1}{L}\cos(x_1) \neq 0, \text{ und } C = (1, 0)$$

(iv) Zur Feststellung, ob BIBO-Stabilität vorliegt, wird die Impulsantwort berechnet: $g(t) = C \cdot e^{At} \cdot B$. Zunächst wir bestimmen $e^{At}$:

$$A^0 = id, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2k} = \begin{pmatrix} \alpha^k & \cdot \\ \cdot & \alpha^k \end{pmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^k \\ \alpha^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

1. Summe: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\alpha}\, t)^{2k}}{(2k)!}}_{= \cosh(\sqrt{\alpha}\, t)}$$

(iv) 2. Summe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}\, t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{k} \\ \alpha^{k+1} & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\alpha})^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\alpha})^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sinh(\sqrt{\alpha} t)}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\alpha} t) & \sinh(\sqrt{\alpha} t)/\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} \cosh(\sqrt{\alpha} t) & \cosh(\sqrt{\alpha} t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow g(t) = \frac{\sinh(\sqrt{\alpha} t)\, B}{\sqrt{\alpha}}$$

$\alpha > 0$ : $\lim_{t \to \infty} \sinh(\sqrt{\alpha} t) = \infty$, $B/\sqrt{\alpha} \neq 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} |g(t)|\, dt \not< \infty$

$\Rightarrow$ nicht BIBO-stabil

# Aufgabe 9.2

(iv) $\alpha < 0$: $\sinh(\sqrt{\alpha}\, t) = j \sin(\sqrt{|\alpha|}\, t) \Rightarrow \int_0^\infty |g(t)|\, dt \not< \infty$

↳ nicht BIBO-stabil

3. Fall: $\cos(x_1) < 0 \wedge \rho > 0$: Bleibt offen, aber prinzipiell auch über $g$ bestimmbar.