Regelungstechnik

8. Übung

Victor Cheidde Chaim

08. März 2021

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 7.1

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h.,prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= A\Phi(t), \\ \Phi(0) &= I \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).

(ii) $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).

(iv) Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha = 1} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} = 1, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}, \quad \dot{\phi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\phi}_{11} &= A_{11}\phi_{11} \\ \dot{\phi}_{12} &= A_{11}\phi_{11} + A_{12}\phi_{12} \\ \dot{\phi}_{22} &= A_{22}\phi_{22} \end{aligned}$

(iv) unabhängige Lösung der Blöcke:

1. ϕ_{11} Skalar: $\phi_{11} = e^{1 \cdot t} = e^{t}$

2. ϕ_{22}: Eigenvektoren λ: $\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = (2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \Rightarrow$ end. Reihe

$$(A_{22} - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nilpotent} \Rightarrow e^{A_{22}t} = e^{2t}\left(I + t(A_{22} - 2I) + 0\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\dot{\phi}_{12} = A_{11}\phi_{12} + A_{12}\phi_{22} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2] = \phi_{12} + [2e^{2t},\ e^{2t} + 4e^{2t} \cdot t]$

$\dot{x}_1 = x_1 + 2e^{2t}$ (vgl. $\dot{x} = Ax + bu \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau$)

$(x_0 = 0)$

$$\Rightarrow x_1(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} 2e^{2\tau} d\tau = 2e^{t}\int_0^t e^{\tau} d\tau = 2e^{t}\left(e^{\tau}\Big|_0^t\right) = 2e^{t}(e^{t} - 1)$$

Aufgabe 7.1

(iv) $\dot{x}_1 = x_2 + e^{2t} + 4e^{2t}\cdot t, \quad x_0 = 0$

$$\hookrightarrow \quad \dot{x}_2 = \int_0^t e^{(t-\tau)}\left(e^{2\tau} + 4e^{2\tau}\cdot\tau\right)d\tau = e^t\int_0^t\left(e^{\tau} + 4e^{\tau}\tau\right)d\tau = e^t\left[e^{\tau} + 4(\tau-1)e^{\tau}\right]\Big|_0^t = 3e^t - 3e^{2t} + 4e^{2t}t$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \begin{pmatrix} e^t & -2e^t + 2e^{2t} & 3e^t - 3e^{2t} + 4e^{2t}t \\ 0 & 2e^{2t} & 2e^{2t}(1+2t) \\ 0 & 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad /\!/$$

Probe: $t = 0 \Rightarrow \phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ✓

Aufgabe 7.1

(iv)

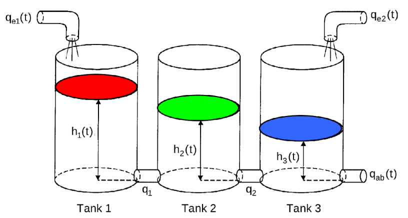
$$\dot{\phi} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t(-1+2e^t) & e^t(3+e^t(-2+8t)) \\ 0 & 2e^{2t} & 2e^{2t}(1+2t) \\ 0 & 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$A\phi = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t(-1+2e^t) & e^t(3+e^t(-2+8t)) \\ 0 & 2e^{2t} & 2e^{2t}(1+2t) \\ 0 & 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\phi} = A\phi$$

Aufgabe 6.1

Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit) q_{e1} bzw. q_{e2}, aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz q_{ab} ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände h1, h2, h3 (das sind also die Ausgänge).



Gesetz von Torricelli:

$$q_{ab} = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3},$$
$$q_i = \mu\sqrt{2g}\,sign(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|},$$

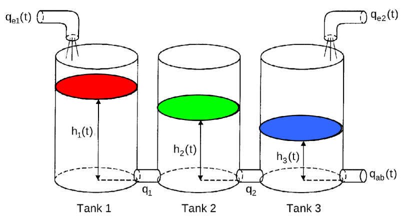
sowie $g,\ \mu,\ F > 0,\ q_{ei} \geq 0,\ h_i \geq 0$.

Aufgabe 8.1

(i) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ in jeder Ruhelage durch den Eingang Δq_{e1} allein steuerbar ist. Hinweis: Linearisiert wird im Punkt $u = (q_{e1}, q_{e2})$ mit zugehörigem h wie bisher. Durch den Eingang Δq_{e1} allein steuerbar zu sein bedeutet, daß der zweite Eingang *der bereits vorliegenden Linearisierung* nicht benutzt wird, also stets den Wert 0 haben soll. Überlegen Sie sich, wie die Anordnung reagiert, wenn Sie sich zunächst in einer Ruhelage befindet und Sie dann den Durchsatz q_{e1} erhöhen bzw. verringern. Kann es z.B. vorkommen, daß sich h_1 und h_3 verringern, während sich h_2 vergrößert? Wie päst das zur Steuerbarkeit?

Aufgabe 8.1

Definition 3.5: Ein dynamisches System (A, b) heißt **steuerbar**, wenn der Zustandsvektor $x(t)$ durch eine geeignete Steuerfunktion $u(t)$ in einer endlichen Zeitspanne $[t_0, t_e]$ aus jedem Anfangzustand $x(t_0)$ in jeden gewunschten Endzustand $x(t_e)$ überführt werden kann.
(*Auch: vollständig z-steuerbar.*)



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}} & 0 \\ \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{1}{u_{0,1}} & \frac{1}{u_{0,1}} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{2u_{0,1}+u_{0,2}}{2u_{0,1}(u_{0,1}+u_{0,2})} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = I_{3x3}, D = 0_{3x2}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit Ruhelage: $u_0 = [u_{0,1} \quad u_{0,2}]$
$y_0 = [h_{e1} \quad h_{e2} \quad h_{e3}]$.

Aufgabe 8.1

Steuerbarkeitskriterien

Satz 3.2 *(Steuerbarkeitskriterien)*

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) (Kalman-Kriterium)

dann und nur dann vollständig z–steuerbar, wenn für die $(n \times n)$ Steuerbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_S$ gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang}\left[\mathbf{b}\ \mathbf{Ab}\ \mathbf{A}^2\mathbf{b}\ ....\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\right] = n \tag{3.37}$$

Der Rang der Steuerbarkeitsmatrix gibt die Anzahl der steuerbaren Zustandsgrößen an.

a2) (Hautus-Kriterium)

Überprüfung der einzelnen Eigenwerte auf Steuerb

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S^* = \text{Rang}\left[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\ \mathbf{b}\right]_{\lambda=\lambda_i} = n \tag{3.38}$$

mit $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ den Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$.

Man sagt dann auch, dass der Eigenwert λ_i nicht steuerbar ist !!

Ist die Bedingung nicht erfüllt, so kann die zugehörige Eigenbewegung nicht beeinflusst werden.

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Regelungstechnik

Aufgabe 8.1

(i) h_1 & h_3 $\downarrow$ && $h_2 \uparrow$

$h_2 \uparrow$: $q_1 > q_2$: $\mathrm{sign}(h_1-h_2)\sqrt{|h_1-h_2|} > \mathrm{sign}(h_3-h_2)\sqrt{|h_3-h_2|}$

Ruhelage: $h_1 - h_2 > h_3 - h_2$ $\boxed{h_1 > h_3}$

$h_3 \downarrow$: $q_{ab} > q_2$ $\sqrt{h_3} > \mathrm{sign}(h_2-h_3)\sqrt{|h_2-h_3|}$

Ruhelage: $\sqrt{h_3} > \sqrt{h_2-h_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{2h_3 > h_2}$

Aufgabe 8.1

(i) $Q_S = [B, AB, A^2B]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{1}{2u_{0,1}^2} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & -\frac{3}{4u_{0,1}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4u_{0,1}^2} \end{bmatrix}$$

rang = 3

$\det(Q_S) \neq 0$

System steuerbar ✓

(ii) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ in jeder Ruhelage allein durch Messung des Ausgangs Δh_3 beobachtbar ist.

Aufgabe 8.1

Definition 3.7 *Beobachtbarkeit*

Das dynamische System (3.1) heißt *vollständig beobachtbar* im Intervall $[t_0, t_e]$, wenn für gegebene t_0 und t_e jeder Systemzustand $\boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ aus der Kenntnis der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ in $[t_0, t_e]$ ermittelt werden kann. □

Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit

Duales System

Mit Hilfe der transponierten Matrizen bzw. Vektoren A^T, b^T, c eines Zustandsmodells (A, b, c^T) lässt sich das sogenannte duale System bilden:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}^T\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{c}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \boldsymbol{b}^T\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned}$$

Originalsystem **Duales System**

Satz 3.5 (Dualität von Steuer– und Beobachtbarkeit)

Ein zeitinvariantes System (3.1) ist vollständig zustandssteuerbar (beobachtbar), wenn sein duales System (3.51) vollständig beobachtbar (zustandssteuerbar) ist.

$\Rightarrow$ **Ein Programm zur Überprüfung der Steuerbarkeit kann auch zur Überprüfung der Beobachtbarkeit eingesetzt werden.**

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Regelungstechnik

Aufgabe 8.1

(ii) Zeigen Sie, daß das linearisierte System unter der Annahme $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ in jeder Ruhelage allein durch Messung des Ausgangs Δh_3 beobachtbar ist.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$y = Cx + Du \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} = \Delta h_3 \quad \checkmark$$

Aufgabe 8.1

(ii) Duale System:

$$\hat{A} = A^T \qquad \hat{Q}_S = [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \hat{A}^2\hat{B}] = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T]$$

$$\hat{B} = C^T$$

$$Q_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4u_{0,1}^2} \\ 0 & \frac{1}{2u_{0,1}} & \frac{4u_{0,1} + 3u_{0,2}}{4u_{0,1}^2(u_{0,1} + u_{0,2})} \\ 1 & \frac{2u_{0,1} + u_{0,2}}{2u_{0,1}(u_{0,1} + u_{0,2})} & \frac{5u_{0,1}^2 + 6u_{0,1}u_{0,2} + 2u_{0,2}^2}{4u_{0,1}^2(u_{0,1} + u_{0,2})^2} \end{pmatrix}$$

$\det(Q_B) \neq 0 \Rightarrow$ beobachtbar

Aufgabe 8.1

(iii) Betrachten Sie hier die Linearisierung mit nur einem Eingang Δq_{e1} in der Ruhelage mit $q_{e1} = q_{e2} = 1/2$ und geeigneten h_i.
Bestimmen Sie Δq_{e1} so, daß der Zustand Δh der Linearisierung in der Zeit 3 von 0 nach $(-0.005, 0.005, -0.005)$ überführt wird. (Benutzen Sie ggf einen Rechner!)

$x = [\Delta h_1 \quad \Delta h_2 \quad \Delta h_3]^T \quad , \quad y = \Delta h_3 \quad , \quad u = \Delta u_1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = 0$

Aufgabe 8.1

(iii) Differentialgleichung:

$$\Delta \dot{h}_1(t) = -\Delta h_1(t) + \Delta h_2(t) + \Delta u_1(t)$$

$$\Delta \dot{h}_2(t) = \Delta h_1(t) - 2\Delta h_2(t) + \Delta h_3(t)$$

$$\Delta \dot{h}_3(t) = \Delta h_2(t) - 3\Delta h_3(t)/2$$

- Anfangsbedingungen $(t=0)$: $h_{0,1} = 0$, $h_{0,2} = 0$, $h_{0,3} = 0$
- Endbedingungen $(t=3)$: $\Delta h_1(t=3) = -0{,}005$

  $\Delta h_2(t=3) = 0{,}005$

  $\Delta h_3(t=3) = -0{,}005$

Aufgabe 8.1

(iii) Ansatz: u_1 stückweise konstant:

$$u_1(t) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq t < 1 \\ z_2, & 1 \leq t < 2 \\ z_3, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

- Berechnung von M: h(1), h(2) und h(3) nacheinander berechnen mit Lösungsformel Lin. Glg-system zu lösen

$\Rightarrow M z =$ Zielpunkt

Lösung: $\{z_1 \to -0{,}367969,\ z_2 \to 0{,}421585,\ z_3 \to 0{,}0898767\}$

Aufgabe 8.1