Regelungstechnik

7. Übung

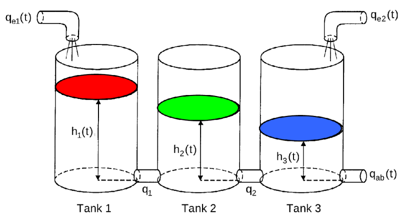
Victor Cheidde Chaim

01. März 2021

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 6.2

Betrachtet werde eine Anordnung von drei miteinander verbundenen Wasserbehältern. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter. In die Behälter 1 und 3 fließt Wasser mit den Durchsätzen (Volumen pro Zeit) q_{e1} bzw. q_{e2}, aus Behälter 3 fließt Wasser mit dem Durchsatz q_{ab} ab, usw., siehe Graphik. Gemessen werden die Füllstände h1, h2, h3 (das sind also die Ausgänge).



Gesetz von Torricelli:

$$q_{ab} = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_3},$$
$$q_i = \mu\sqrt{2g}\,sign(h_i - h_{i+1})\sqrt{|h_i - h_{i+1}|},$$

sowie $g,\ \mu,\ F > 0,\ q_{ei} \geq 0,\ h_i \geq 0.$

(iii) Linearisierung: Ruhelagen : $h_1 \geq h_2 \geq h_3$ $\quad u_1, u_2 \geq 0$

$$x = [x_1 \; x_2 \; x_3]^T, \quad x_1 = h_1, \; x_2 = h_2, \; x_3 = h_3$$

$$y = [x_1 \; x_2 \; x_3]^T$$

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{x_1 - x_2} \\ \sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2 - x_3} \\ \sqrt{x_2 - x_3} - \sqrt{x_3} + u_2 \end{pmatrix}$$

$x_R = [x_{1R} \; x_{2R} \; x_{3R}]$, (u_{1R}, u_{2R}) - Ruhelage

$$\begin{cases} x_{1R} = 3u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 \\ x_{2R} = 2u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 \\ x_{3R} = (u_1 + u_2)^2 \end{cases}$$

Aufgabe 6.2

(iii) Linearisierung:

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$
$$x(t_0) = x_0$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\dot{x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_R,u_R}}_{A} \Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_R,u_R}}_{B} \Delta u$$

$$\Delta y = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x_R,u_R}}_{C} \Delta x + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{x_R,u_R}}_{D} \Delta u$$

$$\Delta x(t_0) = x_0 - x_R$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

(iii) Linearisierung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(u_1 - (x_1 - x_2)^{1/2}\right)}{\partial x_1} = -\frac{(x_1 - x_2)^{-1/2}}{2}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_R, u_R} = -\frac{1}{2}\left((3u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2) - (2u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2)\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2u_1} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial\left(u_1 - (x_1 - x_2)^{1/2}\right)}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^{-1/2}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_R, u_R} = \frac{1}{2u_1} \quad \checkmark \qquad \Big| \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \quad \checkmark$$

Aufgabe 6.2

(iii) Linearisierung: $\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_R, u_R}, \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_R, u_R}, \ldots$ ⇒ zu Hause

$$A = \begin{bmatrix} -1/2u_1 & 1/2u_1 & 0 \\ 1/2u_1 & -1/u_1 & 1/2u_1 \\ 0 & 1/2u_1 & -\frac{2u_1+u_2}{2u_1(u_1+u_2)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✓

Aufgabe 6.1

Gegeben seien die Matrizen A und B. Berechnen Sie $exp(At)$, $exp(Bt)$ und $exp((A+B)t)$. Gilt hier $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $exp(Bt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.1

- $\exp((A+B)t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k t^k}{k!} \Rightarrow (A+B)^k = ?$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{k \geq 1}{(A+B)^k} = (A+B)$$

$$\exp((A+B)t) = I + (A+B)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = I - (A+B) + (A+B)\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}}_{e^t}$$

$$\exp((A+B)t) = I - (A+B) + (A+B)e^t = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe 6.1

- $\exp(At) \cdot \exp(Bt) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \exp((A+B)t)$

$\Rightarrow$ Wenn $AB = BA$, dann gilt

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

$\Rightarrow$ Probe: $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ und $e^{A\cdot 0} = I$

↳ zu Hause

Aufgabe 7.1

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ in den angegebenen Fällen. Machen Sie dabei jeweils eine Probe, d.h.,prüfen Sie, ob Ihre Lösung die Bedingungen

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$
$$\Phi(0) = I$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Hinweis: Transformation auf Diagonalform).
2. $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0$ (Klausuraufgabe).
4. Wie vor, jedoch für $\alpha = 1$ (Klausuraufgabe).

Berechnung der Transitionsmatrix (3)

3. Wenn die $n \times n$ Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ n linear unabhängige Eigenvektoren hat, kann sie mit Hilfe der aus den n Eigenvektoren gebildeten Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ auf Diagonalform transformiert werden:

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

Das transformierte homogene Zustandsmodell besteht aus n entkoppelten DGL der Form
$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t)$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind. Die zur Diagonalmatrix $\boldsymbol{J}$ gehörende Transitionsmatrix $e^{\boldsymbol{J}t}$ hat die leicht berechenbare Form

$$e^{\boldsymbol{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

$A=TJT^{-1}$

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek Regelungstechnik

Aufgabe 7.1

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1/2 - \lambda) - 1 \cdot 1/2 = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1/2$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1/2 \pm \sqrt{1/4 + 4/2}}{2} \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 1 \\ \searrow \lambda_2 = -1/2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenvektoren: $(A - \lambda_i I) v_i = 0$

Aufgabe 7.1

i) $\lambda_1 = 1$

$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{v_{1,1} = v_{1,2}}$$

zugehöriger Eigenvektor:

$\Rightarrow v_1 = [1 \quad 1]^T$

$\lambda_2 = -1/2$

$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{v_{2,1} = -2 v_{2,2}}$$

zugehörigen Eigenvektor:

$\Rightarrow v_2 = [-2 \quad 1]^T$

$\hookrightarrow$ ausreichende Anzahl von Eigenvektoren $\Rightarrow$ diagonalisierbar //

i) Transformationsmatrix $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonale System : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + e^{t} & -2e^{-t/2} + 2e^{t} \\ -e^{-t/2} + e^{t} & e^{-t/2} + 2e^{t} \end{pmatrix} = \phi(t)$$

i) Probe : $t = 0 \rightarrow \phi(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^0 + e^0 & -2e^0 + 2e^0 \\ -e^0 + e^0 & e^0 + 2e^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ✓

• $\dot{\phi}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -e^{-t/2} + e^t & e^{-t/2} + 2e^t \\ \frac{1}{2}e^{-t/2} + e^t & -\frac{1}{2}e^{-t/2} + 2e^t \end{bmatrix}$,

$A\phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{-t/2} + e^t & -2e^{-t/2} + 2e^t \\ -e^{-t/2} + e^t & e^{-t/2} + 2e^t \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -e^{-t/2} + e^t & e^{-t/2} + 2e^t \\ \frac{1}{2}e^{-t/2} + e^t & -\frac{1}{2}e^{-t/2} + 2e^t \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\phi}(t) = A\phi(t)$ ✓

ii) $A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2}-\lambda & 1/2 \\ -1/2 & -1/2-\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{3}{2}-\lambda\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -1}$$

$\Rightarrow$ Lösung über Transformation auf Reihe mit endlich vielen Gliedern.

$$A = (A - \lambda I) + \lambda I \Rightarrow (A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.1

ii) $(A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underbrace{(A-\lambda I)^n = 0,\ n \geq 2}_{\text{nilpotent}}$

- $\exp((A-\lambda I)t) = \exp((A+I)t) = I + t(A+I) = \begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix}$

$\exp(At) = \exp(((A-\lambda I)+\lambda I)t)$, $(A-\lambda I)\lambda I = \lambda I(A-\lambda I)$ $\therefore$

$\exp((A-\lambda I)+\lambda I) = \exp(A-\lambda I)\exp(\lambda I)$

- $\exp(At) = \exp((A-\lambda I)t)\exp(\lambda I t) = \exp((A+I)t)\exp(-It) =$

$= e^{-t}\begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix}$ //

Aufgabe 7.1

ii) Probe: $\phi(0) = \exp(A \cdot 0) = e^{0} \begin{bmatrix} 1-0/2 & 0/2 \\ -0/2 & 1+0/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ✓

$$\dot{\phi}(t) = (-1)e^{-t} \begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ t/2-1/2 & -1/2-t/2 \end{bmatrix},$$

$$A\phi(t) = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 1-t/2 & t/2 \\ -t/2 & 1+t/2 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} t/2+3/2 & 1/2-t/2 \\ t/2-1/2 & -1/2-t/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t) = A\phi(t)$$ ✓

Aufgabe 7.1

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$, wobei $\alpha = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte $\det(A - \lambda I)$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 1}$$

$\Rightarrow$ Lösung über Transformation auf Reihe mit endlich vielen Gliedern.

$$A = (A - \lambda I) + \lambda I \xrightarrow{\lambda = 1} A = (A - I) + I$$

Aufgabe 7.1

iii)

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^n = 0, \quad n \geq 3 \quad \to \text{nilpotent}$$

- $$\exp((A-I)t) = I + t\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.1

iii) $$\exp(At) = \exp(A-I)\exp(I) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(t)$$

Probe: $$\phi(0) = \exp(At) = e^{0}\begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4t \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 2t^2+4t \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t+2 & 4t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t) \quad \checkmark$$