Zusammenfassung der 8. Vorlesung

Beschreibung und Analyse dynamischer Systeme im Zustandsraum

- **Steuerbarkeit eines dynamischen Systems**
  - **Unterscheidung:** Zustandssteuerbarkeit, Zustandserreichbarkeit
  - **Unterscheidung:** Steuerbarkeit und vollständige Steuerbarkeit
    - **Beispiel:** Parallelschaltung zweier identischer Systeme
- **Steuerbarkeitskriterien**
  - **Kalman-Kriterium** (Anzahl der steuerbaren Zustandsgrößen)
  - **Hautus-Kriterium** (Ermittlung, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind)
- **Beobachtbarkeit eines dynamischen Systems**

Zusammenfassung der 8. Vorlesung

- **Beobachtbarkeitskriterien**
  - **Kalman-Kriterium** (Anzahl der beobachtbaren Zustandsgrößen)
  - **Hautus-Kriterium** (Überprüfung der einzelnen Eigenwerte)
- **Duales System (A^T, c^T, b^T) des Systems (A, b, c) und Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit**
- **Numerische Überprüfung der Steuerbarkeit**
- **Kalman-Zerlegung des Zustandsraummodells.**
- **Numerisch stabile Methode zur Überprüfung der Steuer- und Beobachtbarkeit.**
- **Nicht vollständig steuer- und/oder beobachtbare Systeme haben weniger Pole als Eigenwerte.**

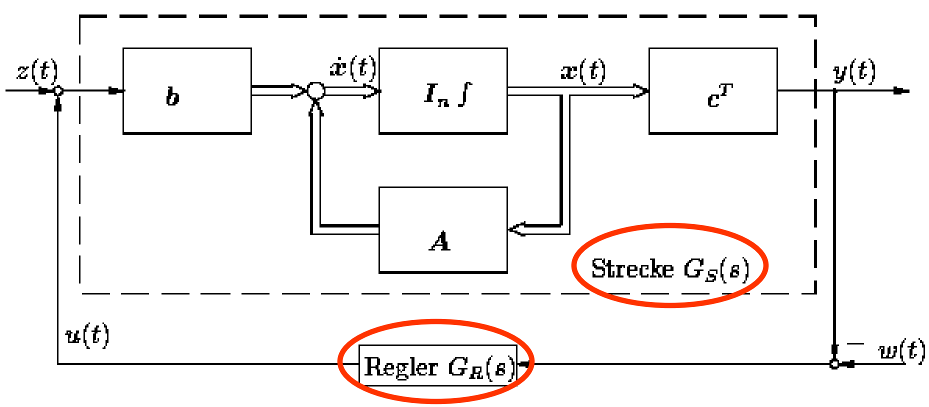
Bei der Art der Rückkopplung kann zwischen

a) Ausgangsrückführung

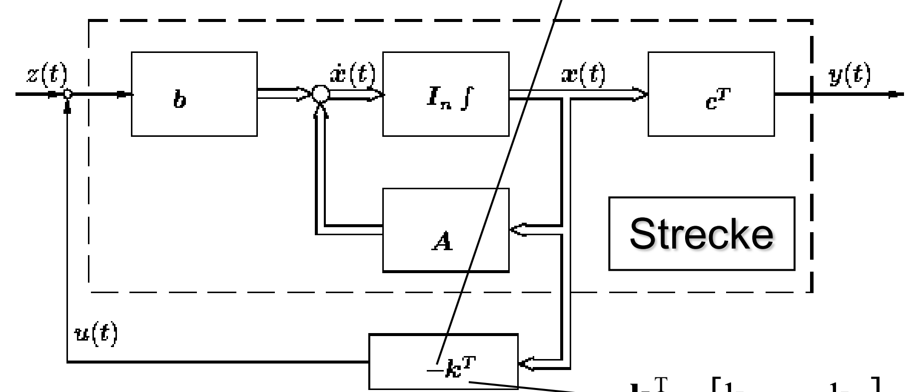
b) Zustandsrückführung

unterschieden werden.

- Rückführung aller Zustandsgrößen
- Statischer Regler: $u(t) = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)$
- Beliebige Platzierung aller Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises, wenn (**A**,**b**) vollständig steuerbar ist.



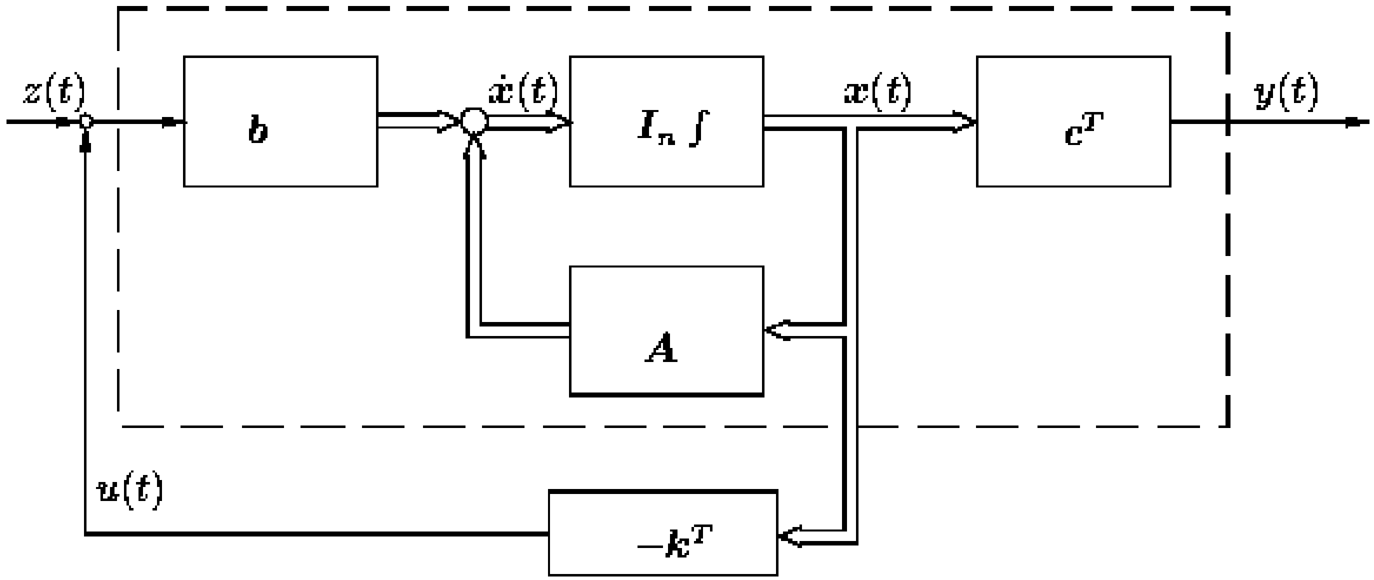
Ausgangsrückführung



$\mathbf{k}^T = [k_1, \cdots, k_n]$

Zustandsrückführung

Zustandsrückführung (2)



- Eine Zustandsrückführung verändert die Eigendynamik.
- Ist (A,b) vollständig steuerbar, so kann die Eigendynamik beliebig eingestellt werden.
- Kein Soll-Ist-Vergleich *(w(t)-y(t))*.
- Stätionäre Genauigkeit kann über ein Vorfilter eingestellt werden.

Modell der Regelstrecke:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}[z(t) + u(t)]$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$$

Durch Einsetzen des Regelgesetzes

$$u(t) = -\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}(t)$$

erhält man das Zustandsmodell des geschlossenen Kreises:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T\right]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}z(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$$

Systemmatrix $\mathbf{A}_G$ des geschlossenen Kreises

Zustandsrückführung (4)

Polvorgabe für Eingrößensysteme

- Nach Vorgabe des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises gibt es eine eindeutige Lösung für die Elemente des Rückführvektors **k**.
- Anhand der Regelungsnormalform können diese Elemente mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs sofort angegeben werden.

Zustandsrückführung (5)

Zustandsrückführung und Regelungsnormalform

$$\dot{\boldsymbol{x}}_R(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_R(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_R(t)$$

Eingangsvektor $\mathbf{b}_R$

Systemmatrix $\mathbf{A}_R$

$$C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\mathbf{b}_R \tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \cdots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{k}_1 & \cdots & \cdots & \tilde{k}_n \end{bmatrix}$$

Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises können durch Wahl der Rückführverstärkung $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \ldots, \tilde{k}_n$ **beliebig** eingestellt werden !!!!

$$\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_R - \mathbf{b}_R \tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + \tilde{k}_1) & -(a_1 + \tilde{k}_2) & \cdots & \cdots & -(a_{n-1} + \tilde{k}_n) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{k}^T = \tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{T}_R^{-1}}$$

Probleme bei der Realisierung eines Zustandsreglers:

- Alle Zustandsgrößen müssen messbar sein!
- Man braucht also *n* Sensoren.
  - ⮩ Aufwendig, teuer, evtl. unzuverlässig.
- Manche Zustandsgrößen können evtl. gar nicht gemessen werden, weil z.B.:
  - Umgebungsbedingungen (Temperatur, Druck, Vibrationen, Schmutz, usw.) zu "feindlich".
  - Sensoren zu teuer.
  - Kontinuierliche Messung nicht möglich.

Beobachterentwurf (2)

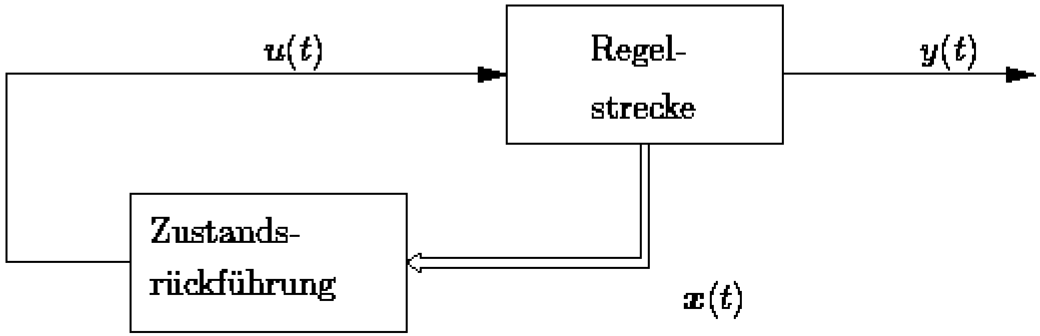
Lösung des Problems

- Beobachtung (Schätzung) der Zustandsgrößen.
- Rückführung der beobachteten Zustandsgrößen anstatt der gemessenen Zustandsgrößen.
- Beobachter = virtueller Sensor !
  - Die beobachteten Signale werden wie Messwerte verwendet, obwohl sie aus anderen Messsignalen berechnete Größen sind.

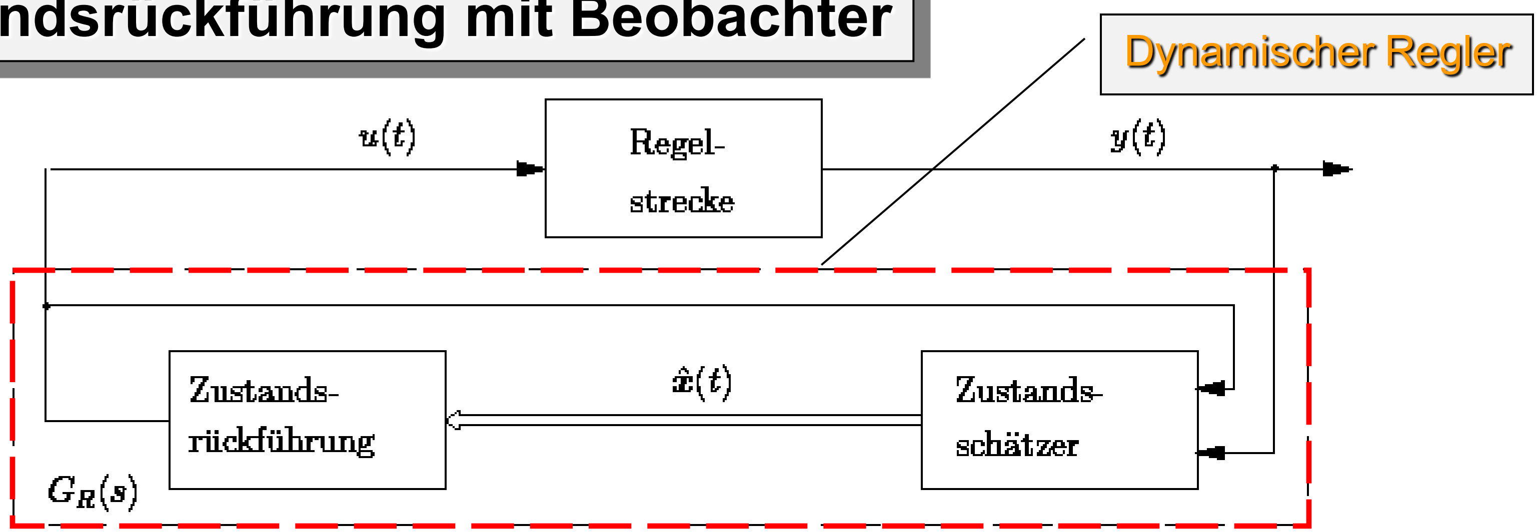
Voraussetzungen

- Ein gutes Modell der Regelstrecke !!!
- Vollständige Beobachtbarkeit des Modells !!!

Strecke mit Zustandsrückführung



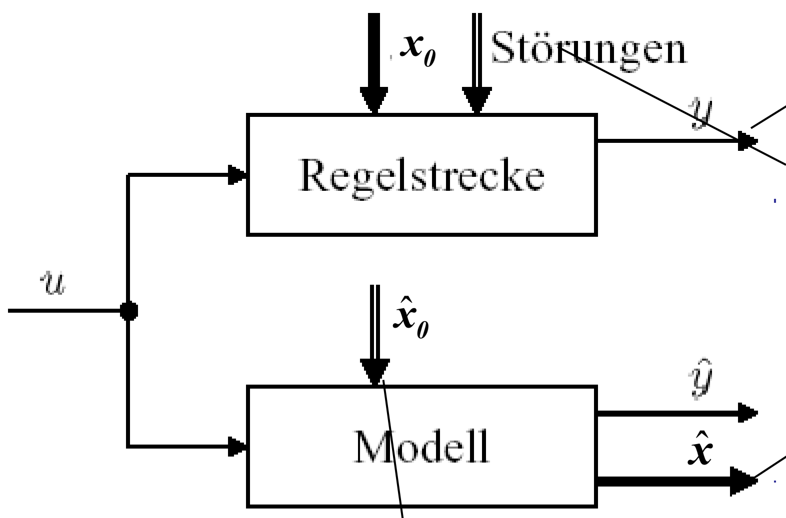
Zustandsrückführung mit Beobachter



Beobachterentwurf (4)

Grundidee des Beobachters

Simulation der Regelstrecke mit Hilfe eines Modells.



Nur Regelgröße wird gemessen.

Störungen sind nicht bekannt !
$\Rightarrow$ $\hat{x}$ **entfernt sich immer weiter von** x

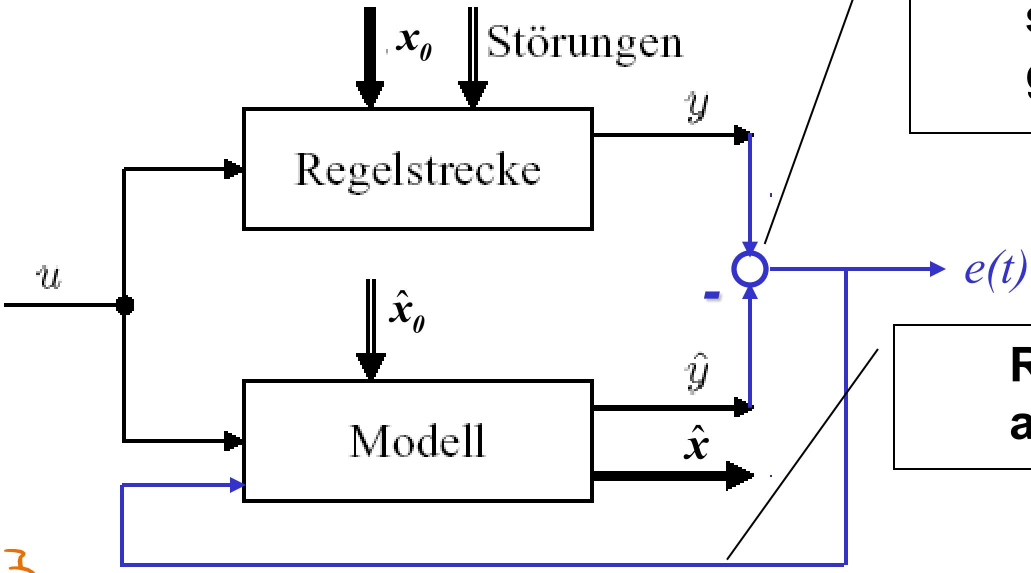
Verlauf der Zustandsgrößen kann mit Hilfe des Modells berechnet werden.

Anfangswerte müssen aus den Messwerten rekonstruiert werden.
$\Rightarrow$ **Strecke muß vollständig beobachtbar sein !!!**

Grundidee des Beobachters (2)

Gemessene Regelgröße *y(t)* wird bisher nur zur Rekonstruktion des Anfangswertes verwendet.

Idee von Luenberger 1964:



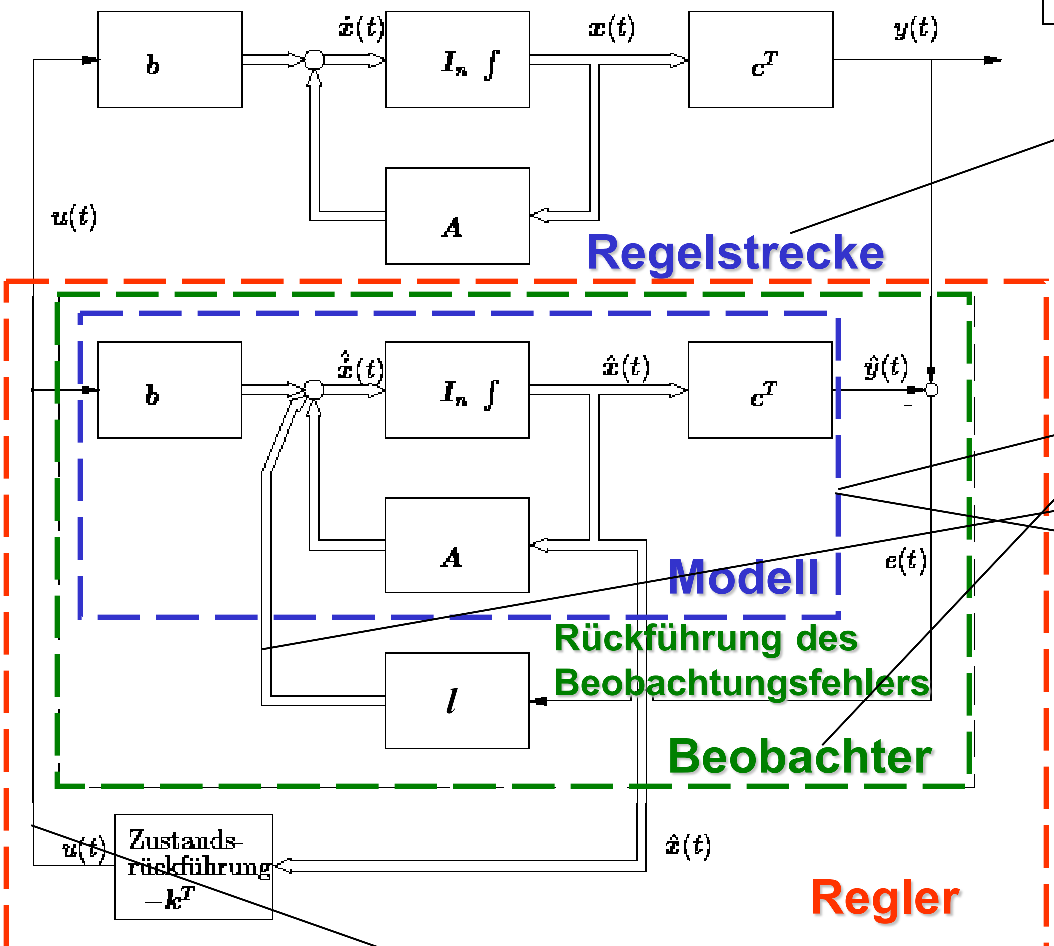
Kontinuierliche Berechnung der Differenz zwischen gemessener und simulierter Regelgröße.

Rückführung dieser Differenz auf den Eingang des Modells.

Luenberger-Beobachter

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) - \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{c}^T(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ &\quad + \mathbf{l}\mathbf{c}^T(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}$$

Rückführung spielt keine Rolle, wenn $\mathbf{x}_0$ bekannt ist, das Modell exakt ist und keine Störungen auftreten !!!!

$$u(t) = -\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}}(t)$$

Konvergenz des Luenberger-Beobachters

Beobachtungsfehler: $\tilde{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$

Bilden der zeitlichen Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \cancel{\mathbf{b}u(t)} - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \cancel{\mathbf{b}u(t)} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))] \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{l}\mathbf{c}^T(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \\
&= [\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T][\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] = [\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T]\,\tilde{\mathbf{e}}(t)
\end{aligned}$$

Satz 4.1 *Konvergenz der Beobachtungsfehlers*

Für den Beobachtungsfehler

$$\tilde{\boldsymbol{e}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$$

eines vollständigen Zustandsbeobachters gilt

$$\lim_{t\to\infty} |\tilde{\boldsymbol{e}}(t)| = 0$$

für beliebige Anfangszustände des Systems und des Beobachters genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T)$ negativen Realteil haben. □

Berechnung der Beobachterrückführung

Die Matrix [A - lc^T] hat dieselben Eigenwerte wie die transponierte Matrix

$$[\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T]^T \quad = \quad \mathbf{A}^T - \mathbf{c}\mathbf{l}^T \; .$$

Die Matrix [A^T - cl^T] ist die Systemmatrix des dualen Systems

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \quad = \quad \mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{c}\tilde{u}(t)$$

mit der Zustandsrückführung

$$\tilde{u}(t) \quad = \quad -\mathbf{l}^T\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

➥ **Festlegung der Beobachtereigenwerte mit Hilfe der Berechnung einer Zustandsrückführung $\mathbf{l}$ für das System (A^T,c).**

Beobachterentwurf (9)

Konsequenz der Dualität

- Die Dualität zwischen dem Entwurf eines Zustandsreglers und eines Beobachters bedeutet, dass jedes Entwurfsverfahren für Zustandsregler auch für den Entwurf von Beobachtern verwendet werden kann.
- Die Eigenwerte der Matrix $[A - l c^T]$, die Beobachtereigenwerte, können nur dann beliebig festgelegt werden, wenn das System (A, c) vollständig beobachtbar ist.

Beobachtungsnormalform

- Besonders einfach kann die Beobachterrückführung $\mathbf{l}$ dann berechnet werden, wenn die Regelstrecke in Beobachtungsnormalform vorliegt.
- Der Vektor $\mathbf{l}_B = [\, a_{B_0} \quad a_{B_1} \quad \dots \quad a_{B_{n-1}} \,]^T - [\, a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \,]^T$

$$\mathbf{l}_B = [\, l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n \,]^T$$

muss dann so gewählt werden, dass die Matrix

$$\boldsymbol{A}_B^T - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{l}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + l_1) & -(a_1 + l_2) & \cdots & \cdots & -(a_{n-1} + l_n) \end{bmatrix}$$

die gewünschten Beobachtereigenwerte besitzt.

Beobachterentwurf (11)

Frage:

Werden die Eigenwerte des Regelkreises durch den Beobachter beeinflußt ?

Antwort:

Nein !!!

Es gilt das Separationstheorem.

Satz 4.2 *Separationstheorem*

Sofern das offene System $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ vollständig steuer– und beobachtbar ist, können die n Eigenwerte der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises (ohne Beobachter) und die n Beobachtereigenwerte separat vorgegeben werden. □

Beweis des Separationstheorems:

Homogene Zustandsgleichung des Gesamtsystems:

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}}$$

Mit $\hat{x} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{e}}$ **erhält man**

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T\tilde{\mathbf{e}} \;.$$

Zusammen mit der Differentialgleichung des Beobachtungsfehlers

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T]\,\tilde{\mathbf{e}}(t)$$

erhält man

Eigenwerte des Regelkreises

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix}$$

Eigenwerte des Beobachters

Anmerkungen zum Beobachterentwurf

- Im geschlossenen Regelkreis können die Dynamik der Regelstrecke und des Beobachters unabhängig voneinander mit Hilfe der Vektoren $\mathbf{k}$ und $\mathbf{l}$ eingestellt werden.
- Die Eigenwerte des Beobachters sollten in der linken komplexen Ebene deutlich links von den dominierenden Eigenwerten des Regelkreises liegen.
- Mit einer solchen Wahl ist sichergestellt, dass der Beobachterfehler deutlich schneller abklingt als die Eigendynamik des Systems.
- Damit wird auch gewährleistet, dass der Beobachter die Regelgüte nur wenig verschlechtert im Vergleich zu einem Zustandsregler mit gemessenen Zustandsgrößen.

Beobachterentwurf (14)

Anmerkungen zum Beobachterentwurf (2)

- Im Gegensatz zur realen Regelstrecke ist der Beobachter eine reine Simulation. Daher muss man bei der Wahl der Eigenwerte des Beobachters nicht auf Stellgrößenbeschränkungen achten.
- Die Beobachterdynamik darf in der Praxis nicht beliebig schnell gemacht werden !
- Es muß ein Kompromiß zwischen schneller Beobachter-dynamik und Rauschempfindlichkeit gefunden werden.
- Je stärker die Messgröße $y(t)$ verrauscht ist, desto langsamer sollte der Beobachter eingestellt werden.

Entwurf einer Zustandsrückführung und eines Beobachters

Voraussetzung: Die Regelstrecke $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ist vollständig steuer– und beobachtbar.

1. Überprüfung, daß die Regelstrecke vollständig steuer– und beobachtbar ist.

2. Entwurf einer Zustandsrückführung

$$u(t) \;=\; -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x}(t)\ ,$$

   die die an den Regelkreis gestellten Güteforderungen erfüllt.

3. Anhand der Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T$ werden die Beobachtereigenwerte festgelegt.

4. Bestimmung des Vektors $\boldsymbol{l}$ der Beobachterrückführung als Zustandsrückführung des dualen Systems $(\boldsymbol{A}_B^T, \boldsymbol{c}_B)$.

5. Bewertung des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises anhand von Simulationsuntersuchungen.

Ergebnis: Zustandsrückführung $\boldsymbol{k}$, Beobachter mit Rückführvektor $\boldsymbol{l}$.