Diagonalform

Wenn die Systemmatrix A durchweg verschiedene Eigenwerte hat, kann ein System (A,b,c) immer durch eine Zustandstransformation

Eigenvektoren

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}(t) \qquad \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$$

auf die folgende kanonische Normalform transformiert werden:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \ldots & \ldots & \tilde{c}_n \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \quad .$$

$$\begin{aligned} \operatorname{diag} \lambda_i &= \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} \\ \tilde{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \tilde{\boldsymbol{c}}^T &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{V} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_0 &= \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}_0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

Eigenvektoren: $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{v}_i = 0$

lineares Gleichungssystem

Stabilität dynamischer Systeme (2)

Definition 3.2 (*Stabilität eines linearen Systems*)
Eine lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem heißt **asymptotisch stabil**, wenn seine Gewichtsfunktion auf Null abklingt, d.h. wenn

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0 \tag{3.25}$$

gilt.

Asymptotische Stabilität
Ein lineares Übertragungssystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln p_i seiner charakteristischen Gleichung

$$\mathrm{Re}\, p_i < 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

erfüllt ist.

Stabilität dynamischer Systeme (3)

Definition:

Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion G(s) bezeichnet man als **charakteristisches Polynom**.

$$C(s) = a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n = a_n \prod_{k=1}^{n} \left(s - p_k \right)$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Polstellen nennt man die **charakteristische Gleichung**:

$$C(s) = a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n = 0$$

Ihre Lösungen werden auch als **Wurzeln** bezeichnet.

Ein-/Ausgangsstabilität (1) (BIBO-Stabilitaet, x(0) = 0)

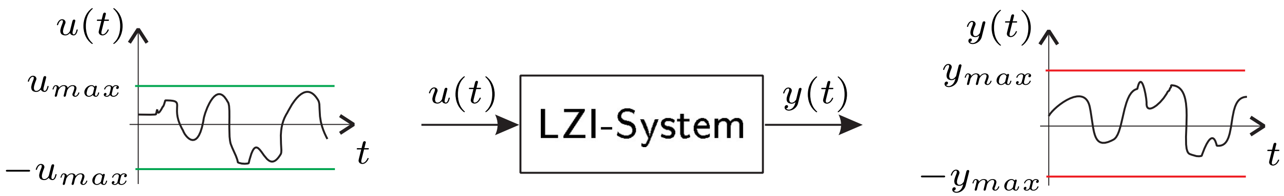
<u>gegeben:</u>

lineares zeitinvariantes System $x(0) = 0$ und Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

<u>Definition:</u>

Das System heißt ein-/ausgangsstabil (übertragungsstabil, e/a-stabil), wenn für jedes beschränktes Eingangssignal $|u(t)| < u_{max}$ das Ausgangssignal $y(t)$ für alle $t \geq 0$ beschränkt bleibt: $|y(t)| \leq y_{max}$.



<u>Satz:</u>

Das System ist genau dann ein-/ausgangsstabil, wenn für die Gewichtsfunktion gilt:

$$\boxed{\int_0^\infty g(t) \cdot dt < \infty}$$

Zustandsstabilität linearer Systeme (u=0)

gegeben:
lineares zeitinvariantes System:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \;\; y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

mit beliebigem Anfangswert $x(0) = x_0 \in X$, einer Ruhelage $x_S = 0$ und $u(t) = 0$ für $t \geq 0$

Definition:
Das System heißt asymptotisch stabil, falls

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Satz:
Das System ist genau dann asymptotisch zustandsstabil, wenn für alle Eigenwerte der Matrix A gilt:

$$\boxed{Re(\lambda_k) < 0 \;\; \text{für alle } k = 1, \ldots, n}$$