

Beschreibung und Analyse dynamischer Systeme im Zustandsraum

- **Definition „Zustand eines dynamischen Systems“**
- **Definition „Zustandsgrößen“ bzw. „Zustandsvariable“**
- **Definition „Zustandsraummodell“ und „Zustandsgleichung“**
- **Graphische Darstellung eines Zustandsraummodells**
 - **Blockschaltbild**
 - **Signalflußgraph**

Beschreibung und Analyse dynamischer Systeme im Zustandsraum

➤ Begriff und graphische Darstellung der **Zustandstrajektorie**

➤ Lösung der Zustandsgleichung

- Matrixexponentialfunktion e^{At}

- Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$, $\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0$

➤ Eigenschaften der Transitionsmatrix

- Zusammenhang: Gewichtsfunktion und Transitionsmatrix

$$g(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b}$$



1. Durch numerische Integration der der Systemdifferentialgleichung zugeordneten Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

n linear unabhängige Anfangsvektoren

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) & \cdots & \dot{x}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_{n1}(t) & \cdots & \dot{x}_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Numerische Integration bis zu einem Zeitpunkt t_1 liefert den Wert der Transitionsmatrix für diesen Zeitpunkt t_1 :

$$\Phi(t_1) = \mathbf{X}(t_1)$$



2. Analog zu dem skalaren Fall als unendliche Reihe:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} .$$

- Für jeden gewünschten Zeitpunkt t_k muß die Reihe berechnet werden.
- Es muss ein **Abbruchkriterium** definiert werden, da eine **unendliche** Reihe nicht berechnet werden kann.



3. Wenn die $n \times n$ Systemmatrix A n linear unabhängige Eigenvektoren hat, kann sie mit Hilfe der aus den n Eigenvektoren gebildeten Transformationsmatrix T auf Diagonalform transformiert werden:

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

Das transformierte homogene Zustandsmodell besteht aus n entkoppelten DGL der Form
 $\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t)$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A sind. Die zur Diagonalmatrix J gehörende Transitionsmatrix e^{Jt} hat die leicht berechenbare Form

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

$$A = TJT^{-1}$$

Diagonalform

Wenn die Systemmatrix **A** durchweg **verschiedene** Eigenwerte hat, kann ein System **(A,b,c)** immer durch eine Zustandstransformation

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$$

Eigenvektoren

auf die folgende kanonische Normalform transformiert werden:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ \dots \ \dots \ \tilde{c}_n] \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{diag } \lambda_i &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{c}}^T &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

Eigenvektoren: $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_i = 0$

lineares Gleichungssystem



Die gesuchte Transitionsmatrix $\Phi(t)$ ergibt sich dann zu:

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{TJT^{-1}t} = Te^{Jt}T^{-1}$$

Liefert eine
analytische Lösung

4. Durch inverse Laplacetransformation

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \right\} .$$

Liefert ebenfalls eine analytische Lösung !

Beweis der Beziehung:

$$e^{\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}t} = \mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{T}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}t} = \mathbf{I} + \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}t + (\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1})^2 \frac{t^2}{2!} + (\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1})^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{J}^2\mathbf{T}^{-1}$$

I

$$(\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1})^2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{J}^3\mathbf{T}^{-1}$$

Ausklammern der Matrizen \mathbf{T} und \mathbf{T}^{-1} liefert:

$$= \mathbf{T} \left[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{J}t + \mathbf{J}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{J}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right] \mathbf{T}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{J}t}$$

$$= \mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{T}^{-1}$$




```

%
% RT
% Beispiel für numerische Probleme bei der Berechnung der Matrix-
%   exponentialfunktion exp(A)
%
% F. Svaricek, 21.05.2002
%

%
% Definition der Matrix A = T diag(-1 -37 ) inv(T)
%
T=[1 3; 2 4]
%
A = T * diag([-1 -37]) * inv(T)

%
disp([' Berechnung mit Hilfe der Matlab-Standardfunktion EXPM'])
%
EA = expm(A)

```

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -109 & 54 \\ -144 & 71 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} -0.7358 & 0.5518 \\ -1.4715 & 1.1036 \end{bmatrix}$$



```
%
disp([' Berechnung mit Hilfe der Diagonalmatrix'])
%
EA1 = T * diag([exp(-1) exp(-37)]) * inv(T)
```

$$EA1 = \begin{bmatrix} -0.7358 & 0.5518 \\ -1.4715 & 1.1036 \end{bmatrix}$$

```
%
disp([' Berechnung mittels des Reihenansatzes (Matlab-Funktion EXPMDemo2)'])
%
EA2 = expmdemo2(A)
```

Entspricht im skalaren Fall: $e^{a/2} \cdot e^{a/2} = e^a$

$$EA2 = \begin{bmatrix} -1.0692 & 0.9035 \\ -2.7749 & 2.0979 \end{bmatrix}$$

```
%
disp([' Berechnung mit Skalierung und Quadrierung : (exp(A/2))^2'])
%
A2 = A/2
```

Wähle einen Skalierungsfaktor k als Potenz von 2 so, dass $\|A\|/k < 1$ wird.

```
EA3 = expmdemo2(A2)

EA3 = EA3*EA3
```

$$EA3 = \begin{bmatrix} -0.7358 & 0.5518 \\ -1.4715 & 1.1036 \end{bmatrix}$$



Anwendung der Laplace-Transformation auf das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

führt auf:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}U(s)$$

$$[\mathbf{I}s - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}U(s)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s) \Rightarrow \mathbf{X}(s) = \underbrace{[\mathbf{I}s - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}_0}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{[\mathbf{I}s - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}U(s)}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (21)$$

$$Y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s)$$

Einsetzen von $\mathbf{X}(s)$ in die Ausgangsgleichung liefert das Übertragungsverhalten im **Frequenzbereich**:

$$Y(s) = \mathbf{c}^T [\mathbf{I}s - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T [\mathbf{I}s - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}U(s) .$$



Durch einen Koeffizientenvergleich von

$$Y(s) = \cancel{c^T [Is - A]^{-1} x_0} + \underbrace{c^T [Is - A]^{-1} b}_{G(s)} U(s) .$$

$G(s)$

mit der Lösung im Zeitbereich

$$y(t) = \cancel{c^T \Phi(t) x_0} + \underbrace{c^T \int_0^t \Phi(t - \tau) b u(\tau) d\tau}_{g(t - \tau)} .$$

$$c^T \Phi(t - \tau) b = g(t - \tau)$$

erhält man für $x_0 = 0$ folgende Beziehungen zwischen Zustandsmodell und Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} G(s) &= c^T [Is - A]^{-1} b \\ &= \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{c^T e^{At} b\} . \end{aligned}$$



Definition 3.2 (*Stabilität eines linearen Systems*)

Ein lineares, zeitinvariantes System, das durch die Zustandsgleichungen (3.1) beschrieben wird, heißt **asymptotisch stabil**, wenn die Lösung $\mathbf{x}(t)$ der homogenen Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

für einen beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 für $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht. □

Aus der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

erhält man für $u(t) = 0$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 .$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

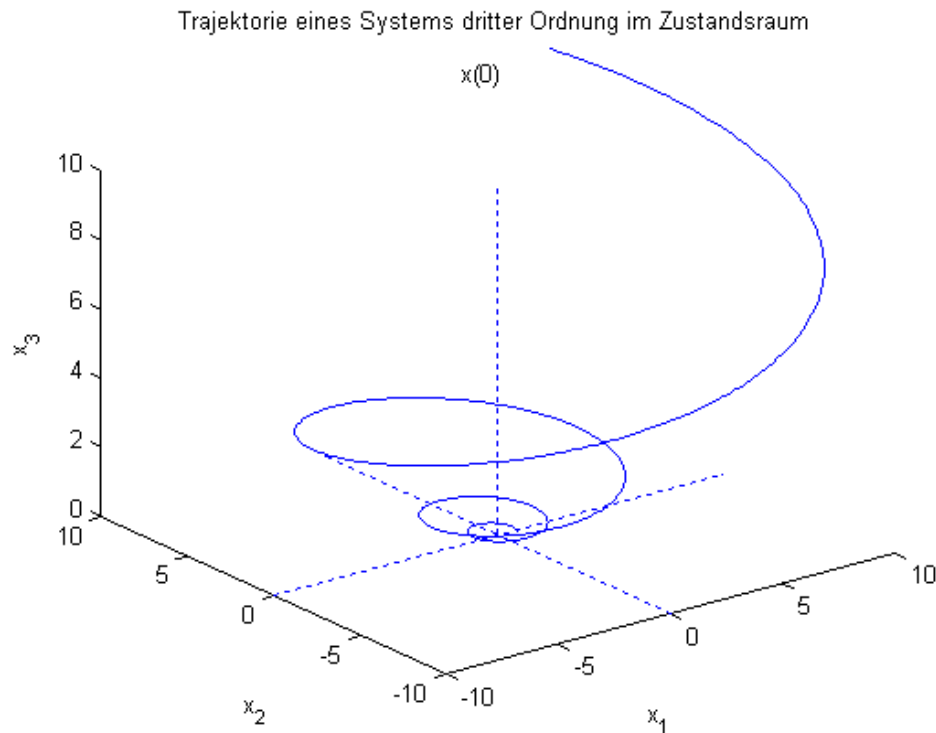
kann für beliebige \mathbf{x}_0
nur dann erfüllt werden,
wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0$$

gilt.



Zustandstrajektorie eines asymptotisch stabilen Systems



Aus der Darstellung

$$\Phi(t) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}$$

λ_i : Eigenwerte der Systemmatrix **A**

Eigenwerte einer $n \times n$ Matrix **A** sind die Wurzel der charakteristischen Gleichung
 $C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

folgt, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0$$

genau dann erfüllt ist, wenn die Terme $e^{\lambda_i t}$ für $t \rightarrow \infty$ abklingen :

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$



Alle Eigenwerte der Systemmatrix **A müssen in der offenen linken λ -Halbebene liegen !!!**



Die charakteristische Gleichung

$$C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

ist für die Analyse linearer Systeme im Zustandsraum von grundlegender Bedeutung:

- $C(\lambda)$ gibt Aufschluss über das **Stabilitätsverhalten** des Systems.
- $C(\lambda)$ ist für ein System mit n konzentrierten Energiespeichern ein Polynom **n -ten Grades**.
- Die Eigenwerte λ_i bestimmen die **Eigenbewegungen** des Systems, die durch $x_i(t) = e^{\lambda_i t}$ beschrieben werden.
- Für ein Polynom mit **reellen Koeffizienten** können die Wurzeln nur **reell** oder **paarweise konjugiert komplex** sein.



Asymptotische Stabilität versus BIBO-Stabilität

Definition 3.3 (*BIBO-Stabilität eines linearen Zustandsmodells*)

Ein lineares, zeitinvariantes System, das durch die Zustandsgleichungen (3.1) beschrieben wird, heißt **BIBO-stabil**, wenn für verschwindende Anfangsauslenkungen, d.h.

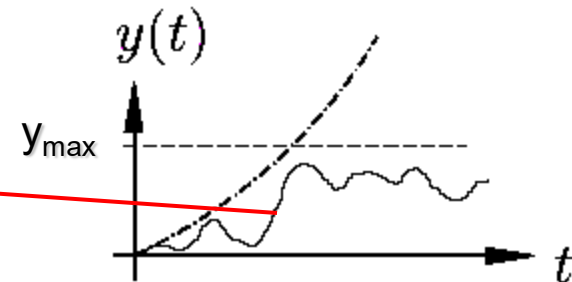
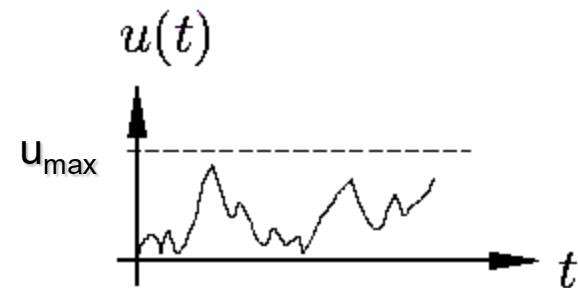
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

und ein beliebiges beschränktes Eingangssignal

$$|u(t)| < u_{\max} \quad \text{für alle } t > 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt:

$$|y(t)| < y_{\max} \quad \text{für alle } t > 0.$$



□

Ein Übertragungssystem mit der Gewichtsfunktion $g(t)$ ist genau dann **BIBO**-stabil, wenn

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

gilt (SRT, Abschnitt 3.3).

Beweis:

Für ein beschränktes Eingangssignal $|u(t)| \leq u_{\max} \leq \infty$ erhält man mit Hilfe des Faltungsintegrals für das Ausgangssignal:

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \leq |u_{\max}| \int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq y_{\max}$$

\Rightarrow Das Integral $\int_0^t |g(\tau)| d\tau$ muss für $t \rightarrow \infty$ endlich sein !!!



Bedingung für asymptotische Stabilität des ZRM:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0$$

Aus dieser Bedingung und dem Zusammenhang

$$g(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b}$$

ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

und

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty .$$



Satz 3.1 (*Asymptotische Stabilität und BIBO-Stabilität*)

Ist ein System (3.1) asymptotisch stabil, so ist es auch BIBO-stabil. □

Frage: Folgt aus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

auch immer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0$$

?



Die Umkehrung dieses Satzes (aus BIBO-Stabilität folgt asymptotische Stabilität des ZRM) gilt nur dann, wenn alle Eigenbewegungen des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

in die Gewichtsfunktion

$$g(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b} \Rightarrow$$

eingehen.

Für $\tilde{c}_i = 0$ bzw. $\tilde{b}_i = 0$ enthält $g(t)$ nicht alle Eigenbewegungen des Zustandsraummodells !!!

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{c}}^T} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}}_{\tilde{\mathbf{b}}} = \tilde{\mathbf{c}}^T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\
 &= [\tilde{c}_1 \quad \dots \quad \tilde{c}_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} \\
 &= [\tilde{c}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \dots \quad \tilde{c}_n e^{\lambda_n t}] \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \tilde{b}_i e^{\lambda_i t}
 \end{aligned}$$



Signalflußgraph für diagonale Systemmatrix

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + du(t)$$

In der Ausgangsgröße $y(t)$ sind keine Informationen über die 2. Zustandsgröße enthalten.

Die Eingangsgröße $u(t)$ hat keinen Einfluss mehr auf die 1. Zustandsgröße.

