Zusammenfassung der 1. Vorlesung

Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines linearen Systems im Frequenzbereich

- **Frequenzgang: Übertragung sinusförmiger Signale unterschiedlicher Frequenzen.**
  - **Amplitude und Phasenverschiebung des Ausgangssignals ist frequenzabhängig.**
  - **Darstellung als komplexe Funktion: Frequenzgang $G(j\omega)$**
  - **Amplitudengang (frequenzabhängige Systemverstärkung).**
  - **Phasengang (Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangssignal).**
  - **$G(j\omega)$ als Randfunktion von $G(s)$ ($G(j\omega) = G(s{=}j\omega)$).**
- **Ortskurvendarstellung (Nyquist-Ortskurve).**
- **Bode-Diagramm.**

Zusammenfassung der 1. Vorlesung

- **Ortskurve und Bodediagramm des PT_1-Systems.**
  - **Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei $\omega_E = 1/T$.**
  - **ω_E : Knick-, Eck- bzw. Grenzfrequenz.**
  - **3 dB: Differenz Amplitudengang und horizontale Asymptote bei ω_E.**
  - **Nach ω_E fällt Amplitudengang mit 20 dB / Dekade ab.**
  - **Phasenverschiebung von $0 \rightarrow -90^\circ$**
  - **Phasenverschiebung bei ω_E : -45°**

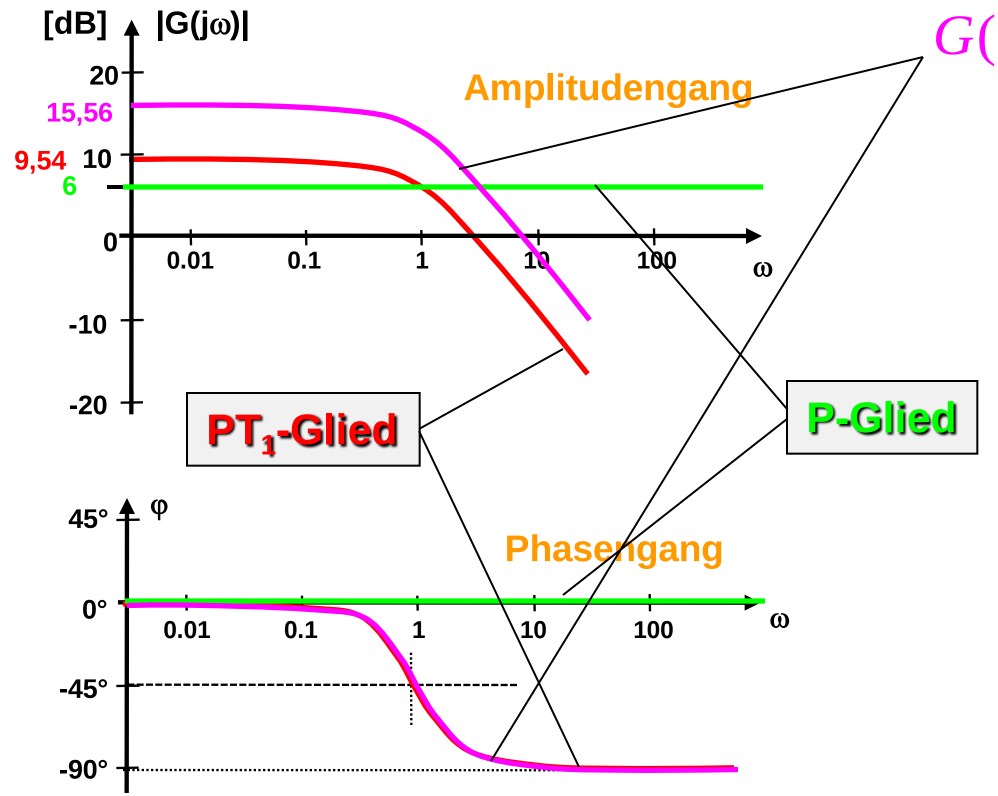
Bode-Diagramm einer Reihenschaltung von PT_1- und P-Glied:

$$G(j\omega) = \frac{3}{1+j\omega} \cdot 2$$

9,54 dB

6,02 dB

$$(3 \cdot 2)_{dB} = 9{,}54\ \text{dB} + 6{,}02\ \text{dB}$$
$$= 15{,}56\ \text{dB}$$



Frequenzgang PT_2-System (reelle Pole)

Differentialgleichung:

$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2)\,\dot{y}(t) + y(t) = K\,u(t)$$

Übertragungsfunktion:

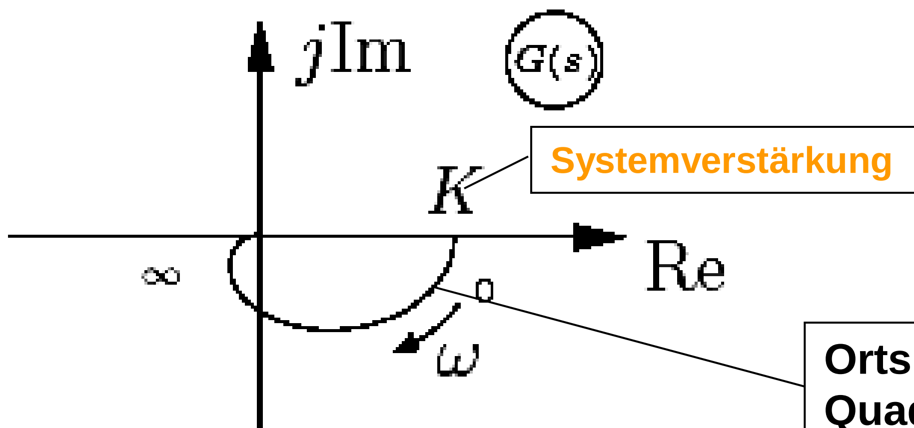
$$G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)\,(1+sT_2)}$$

Reihenschaltung von 2 PT_1-Gliedern

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega T_1)\,(1+j\omega T_2)}$$

Ortskurve:



Ortskurve durchläuft zwei Quadranten der G(s)-Ebene

Frequenzgang PT_2-System (reelle Pole)

Differentialgleichung:

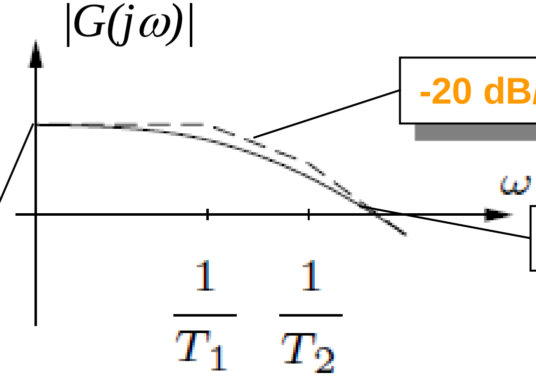
$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2)\,\dot{y}(t) + y(t) = K\,u(t)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)\,(1 + sT_2)}$$

Reihenschaltung von 2 PT_1-Gliedern

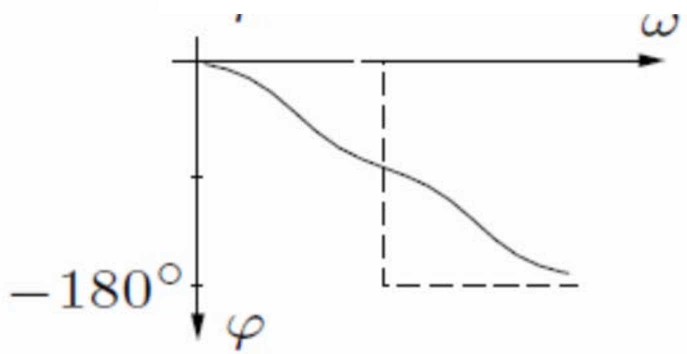
Bode-Diagramm:



-20 dB/Dekade

-40 dB/Dekade

Systemverstärkung

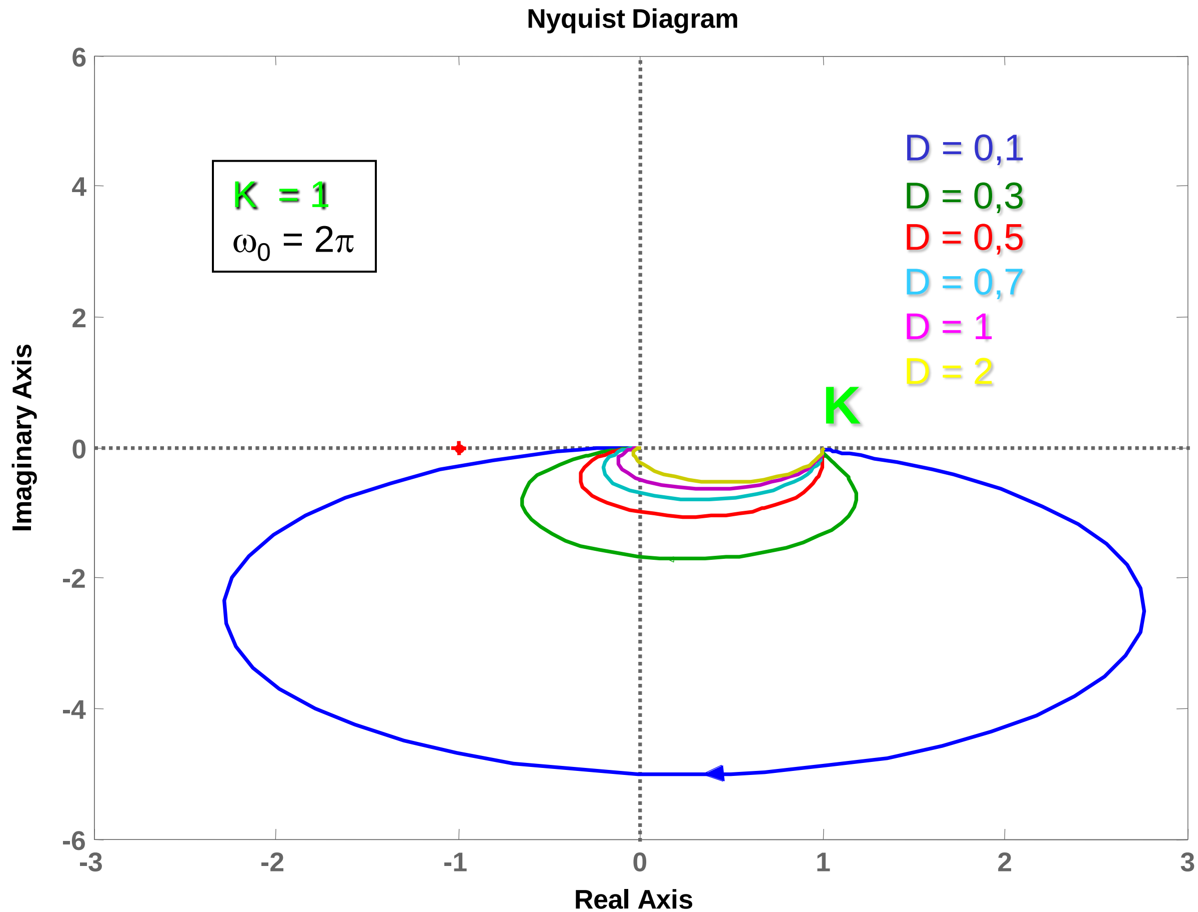


Frequenzgang PT$_2$-System (komplexe Pole)

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{2D}{\omega_0}\omega - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2jD\omega_0\omega}$$

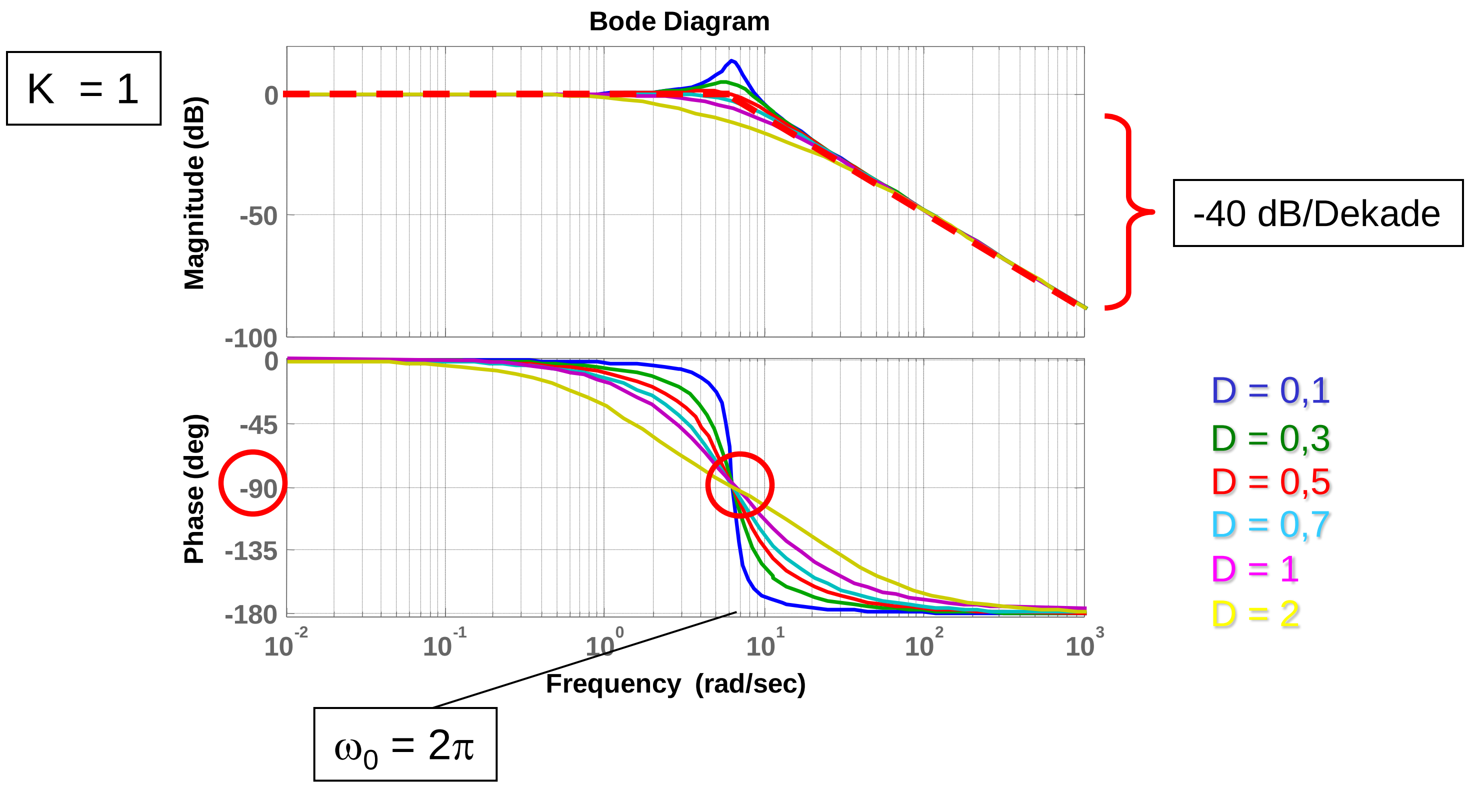
Ortskurve:



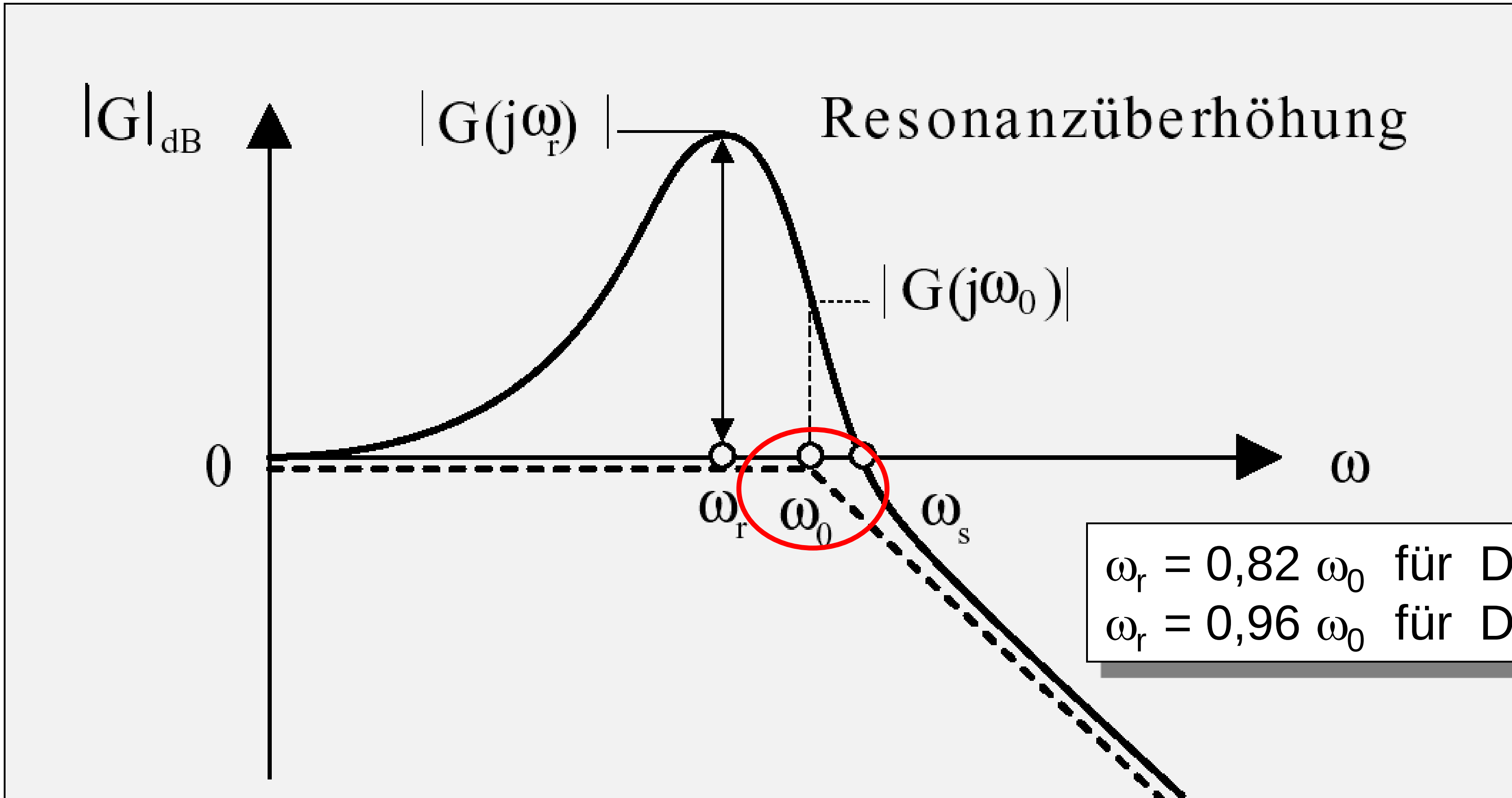
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{2D}{\omega_0}\omega - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2jD\omega_0\omega}$$

Bodediagramm:



PT$_2$-System: Resonanzüberhöhung



$\omega_r = 0{,}82\ \omega_0$ für $D = 0{,}4$

$\omega_r = 0{,}96\ \omega_0$ für $D = 0{,}2$

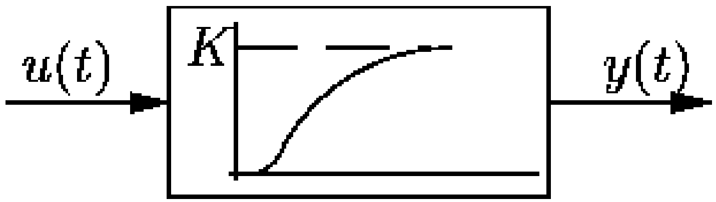
ω_r folgt aus $\boxed{\dfrac{d\,|G(j\omega)|}{d\omega} = 0}$ **zu** $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2D^2}}$

PT$_n$-System

Differentialgleichung:

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + y(t) = K\, u(t)$$

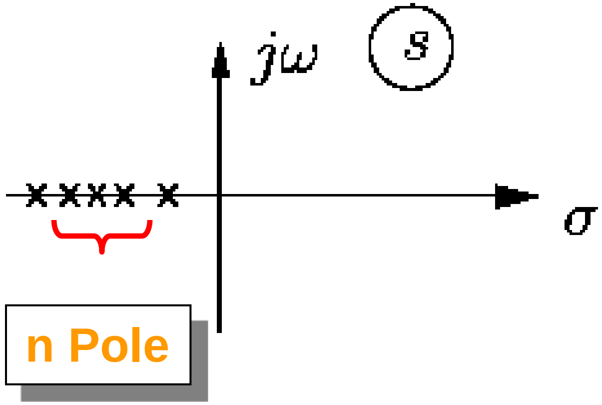
Sprungantwort:



Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}$$

Pole:

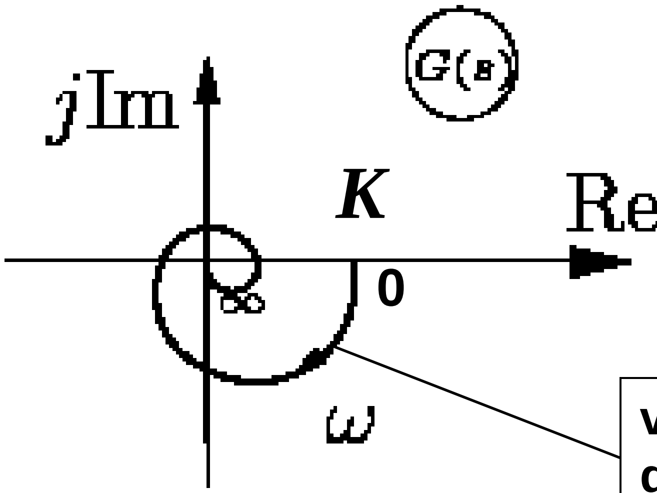


Frequenzgang PT$_n$-System

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + a_1 j\omega - a_2\omega^2 + \cdots + a_n(j\omega)^n}$$

Ortskurve:



verläuft durch n Quadranten der G(s)-Ebene

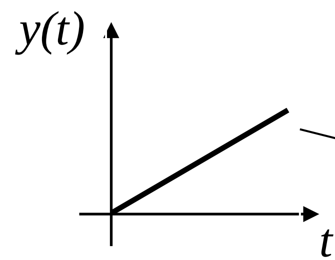
I-System (System ohne Ausgleich)

Differentialgleichung:

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) = K_I u(t)$$

$a_0 = 0$

Sprungantwort:

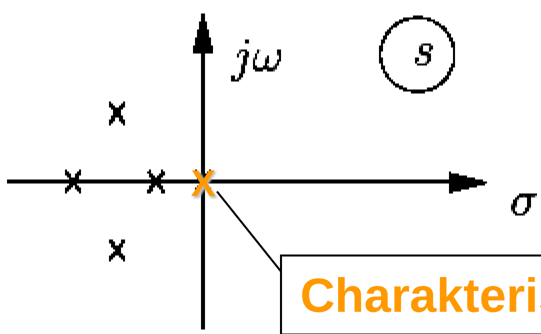


Ideales I-Glied

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K_I}{s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n} = \frac{K_I}{s} \cdot \frac{1}{(1 + \bar{a}_1 s + \cdots + \bar{a}_{n-1} s^{n-1})}$$

Pole:



Charakteristisch: **Pol im Ursprung**

Frequenzgang: I-System ohne Verzögerung

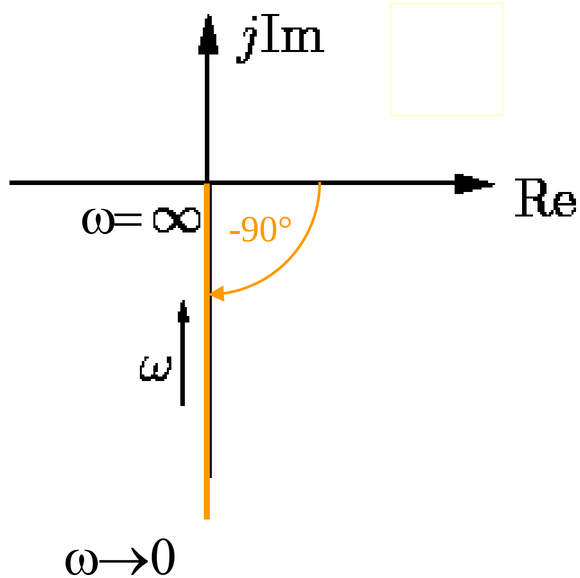
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega}$$

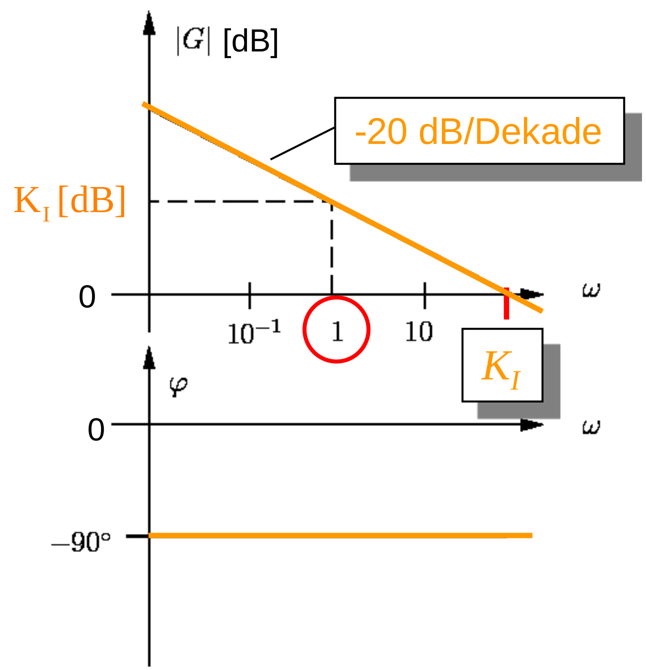
⇨ $G(j\omega) = -j \cdot K_I/\omega$

$|G(j\omega)| = K_I/\omega$

Ortskurve:



Bodediagramm:



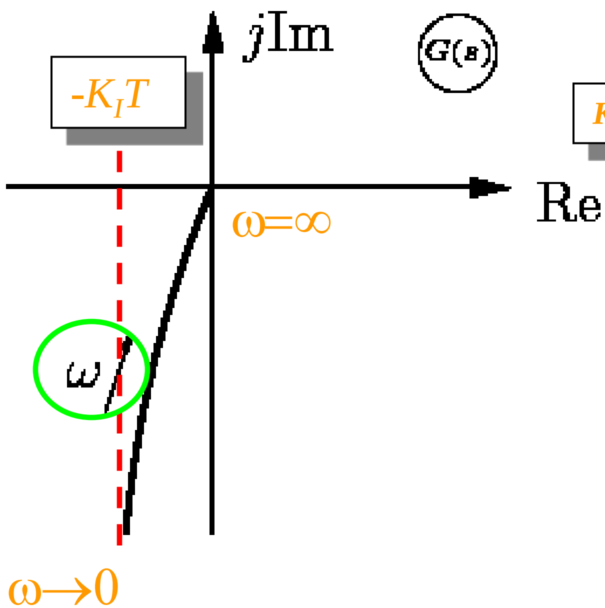
Frequenzgang: IT_1-System

Reihenschaltung von I- und PT_1-Glied

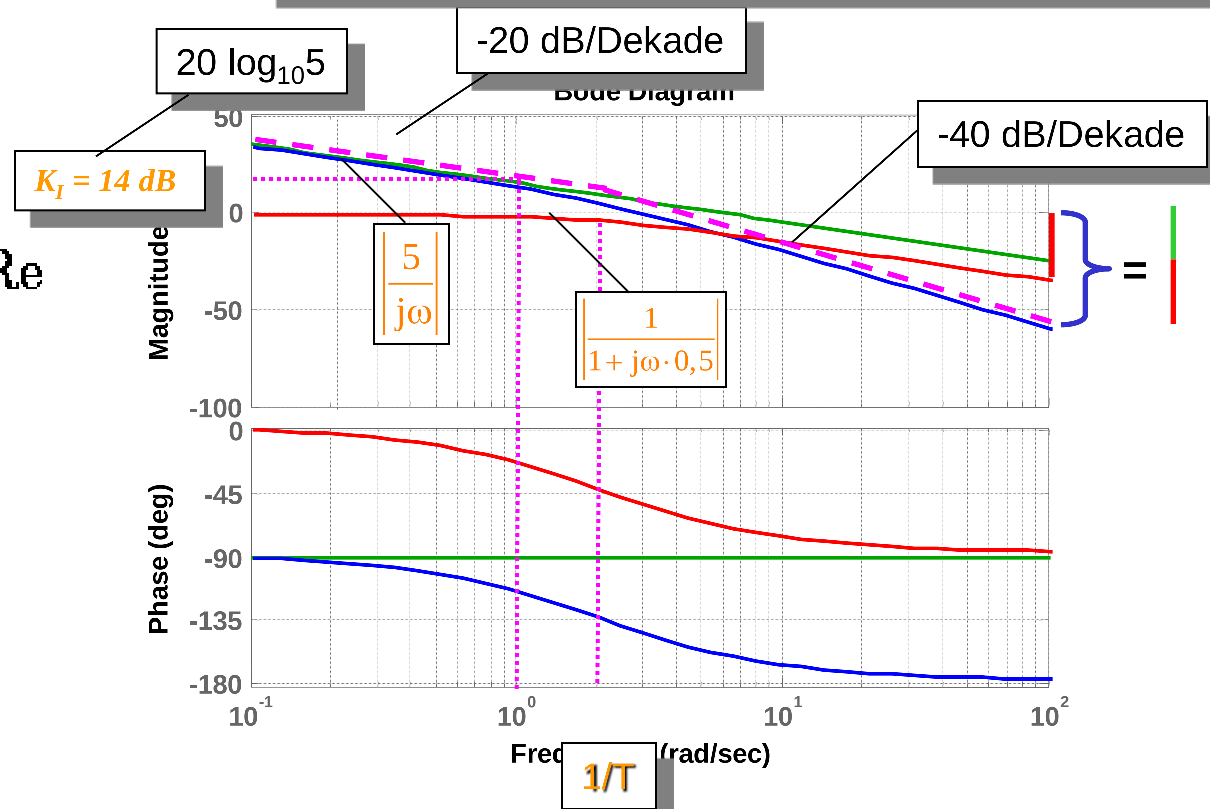
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega(1+j\omega T)} = \frac{-K_I T}{1+\omega^2 T^2} - j\frac{K_I}{\omega(1+\omega^2 T^2)}$$

Ortskurve:



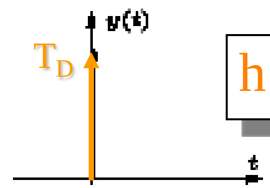
Bodediagramm: (K_I = 5, T=0,5)



D-System (ideales Differenzierglied)

Differentialgleichung: $y(t) = T_D \dot{u}(t)$

Sprungantwort:

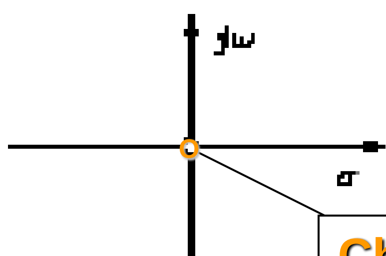


$h(t) = T_D \delta(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = T_D s$

Pole: - - - - -

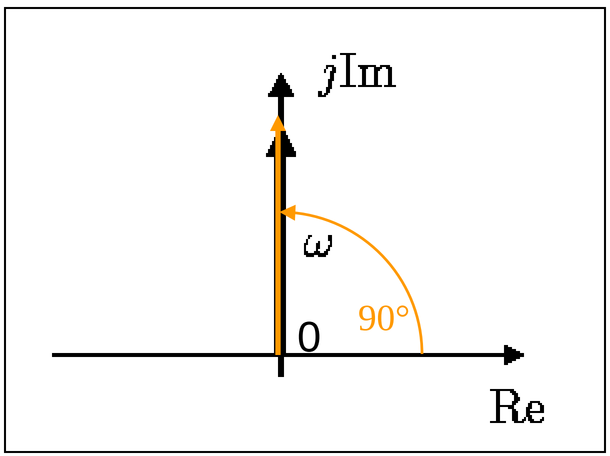
Nullstellen:



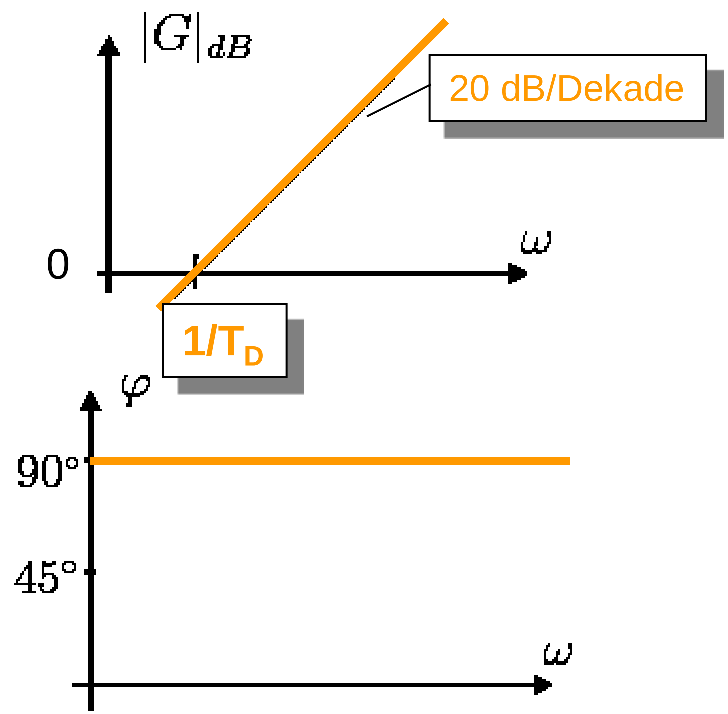
Charakteristisch: **Nullstelle im Ursprung**

Frequenzgang: $G(j\omega) = jT_D\omega$ ⇨ $|G(j!)| = T_D !$

Ortskurve:



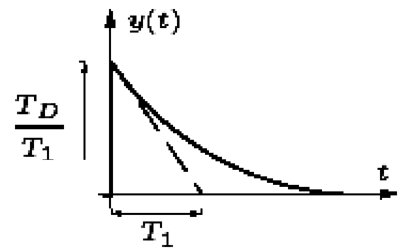
Bodediagramm:



Differentialgleichung:

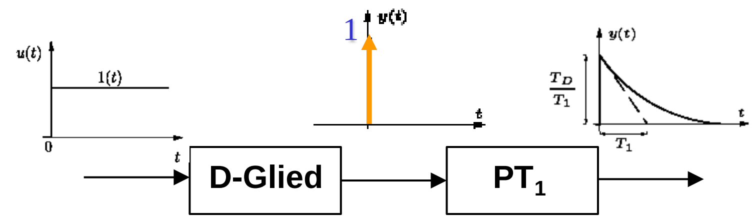
$$T\dot{y}(t) + y(t) = T_D\dot{u}(t)$$

Sprungantwort:



Übertragungsfunktion:

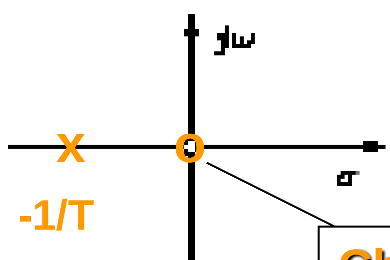
$$G(s) = \frac{T_D s}{Ts+1}$$



Reihenschaltung PT_1- und D-Glied

Pole:

Nullstellen:



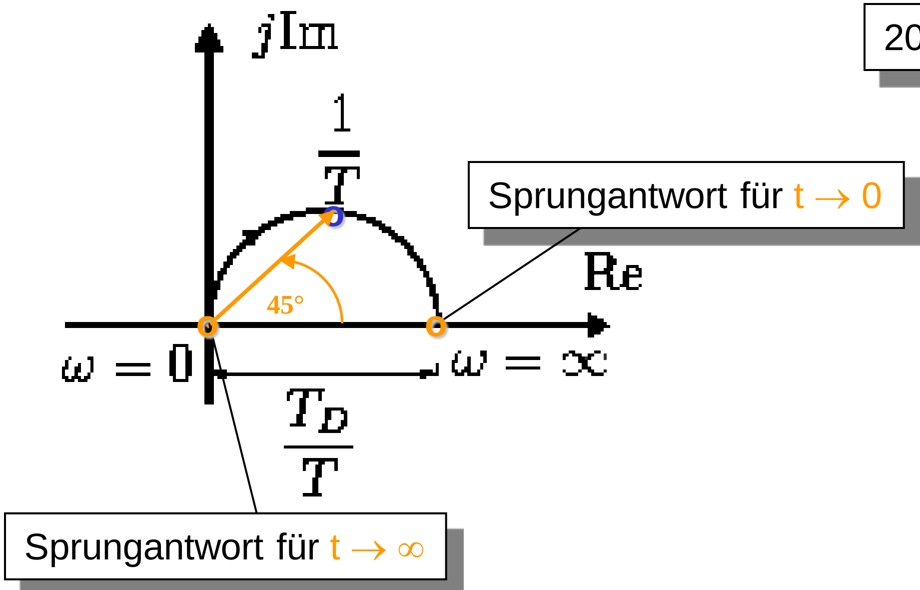
Charakteristisch: Nullstelle im Ursprung

Frequenzgang: DT_1-System

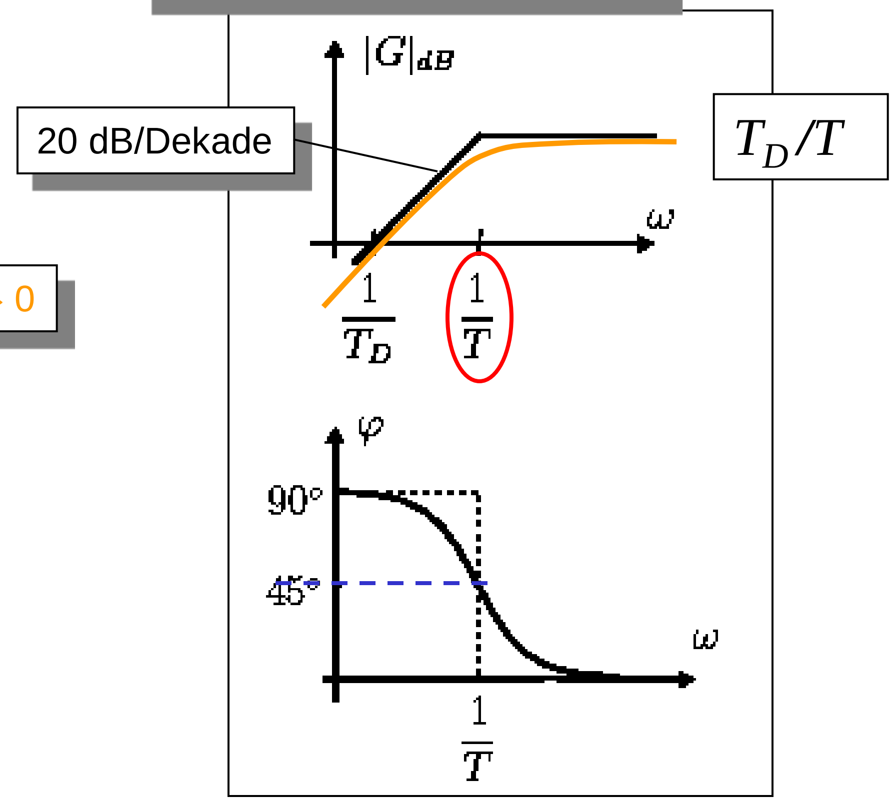
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{T_D\, j\omega}{(1 + j\omega T)} = \frac{\omega^2 T T_D}{\omega^2 T^2 + 1} + j\frac{\omega T_D}{\omega^2 T^2 + 1}$$

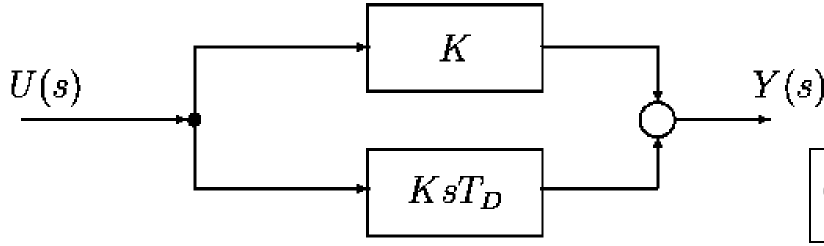
Ortskurve:



Bodediagramm:

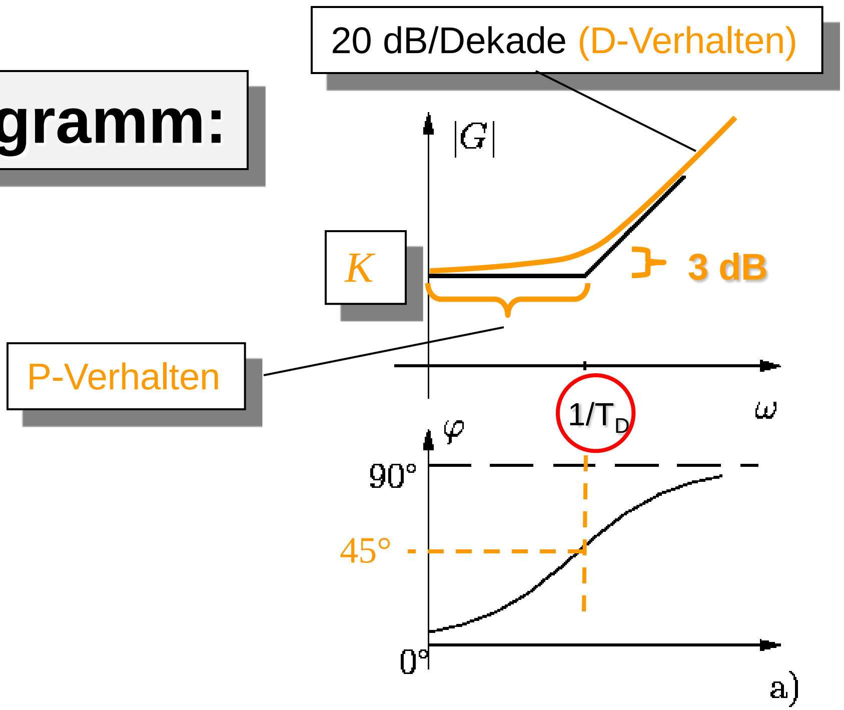


PD-System: **Parallelschaltung eines P- und eines D-Gliedes**



$$G(j\omega) = K + j\omega K T_D$$

Bodediagramm:



$$|G(j\omega)| = \sqrt{K^2 + (\omega K T_D)^2}$$

$$= K\sqrt{1 + (\omega T_D)^2}$$

Für $\omega = 1/T_D$ ergibt sich:

$$|G| = K\sqrt{1+1} \quad = K\sqrt{2}$$

$$|G|_{dB} = K_{dB} + 3{,}03\,dB$$