Viele der in der folgenden Darstellung benutzten Bezeichnungen sind in DIN 19 226 „Regelungstechnik und Steuerungstechnik“ genormt. Einige der häufig vorkommenden Begriffe werden hier zunächst zusammenfassend eingeführt.

Regelgröße: Größe (Veränderliche), die unabhängig von äußeren Einflüssen auf einem gewünschten, festen oder veränderlichen Wert gehalten werden soll.

Störgröße: Jede auf eine Regelung einwirkende Größe, die die beabsichtigte Beeinflussung der Regelung behindert.

Stellgröße: Größe, durch deren Änderung die Regelgröße beeinflußt werden kann. Die Stellgröße ist die Ausgangsgröße der Regeleinrichtung und Eingangsgröße der Regelstrecke. Mit der Stellgröße wird der Energie– und/oder Materialfluß in die Regelstrecke beeinflußt.

Regelstrecke: Anlage (Gerät), bei der (dem) eine oder mehrere Größen – die Regelgrößen – gegen unbeabsichtigte Einflüsse auf gewünschten Werten gehalten werden, indem eine oder mehrere Eingangsgrößen – die Stellgrößen – verändert werden.

Regler: Gerät zur Erfassung der Differenz zwischen Istwert und Sollwert der Regelgröße und zur Betätigung des Stellgliedes.

Stellglied: Ein am Eingang der Strecke liegendes Glied zur Beeinflussung eines Energie– oder Mengenstromes.

Regelkreis: Geschlossener Wirkungskreis aus Regelstrecke und Regeleinrichtung.

Sollwert: Wert, den eine (Regel–)Größe im betrachteten Zeitpunkt unter festgelegten Bedingungen haben soll.

Istwert: Wert, den eine Größe im betrachteten Zeitpunkt tatsächlich hat.

Führungsgröße: Größe, die der Regeleinrichtung von außen zugeführt wird und der die Regelgröße folgen soll

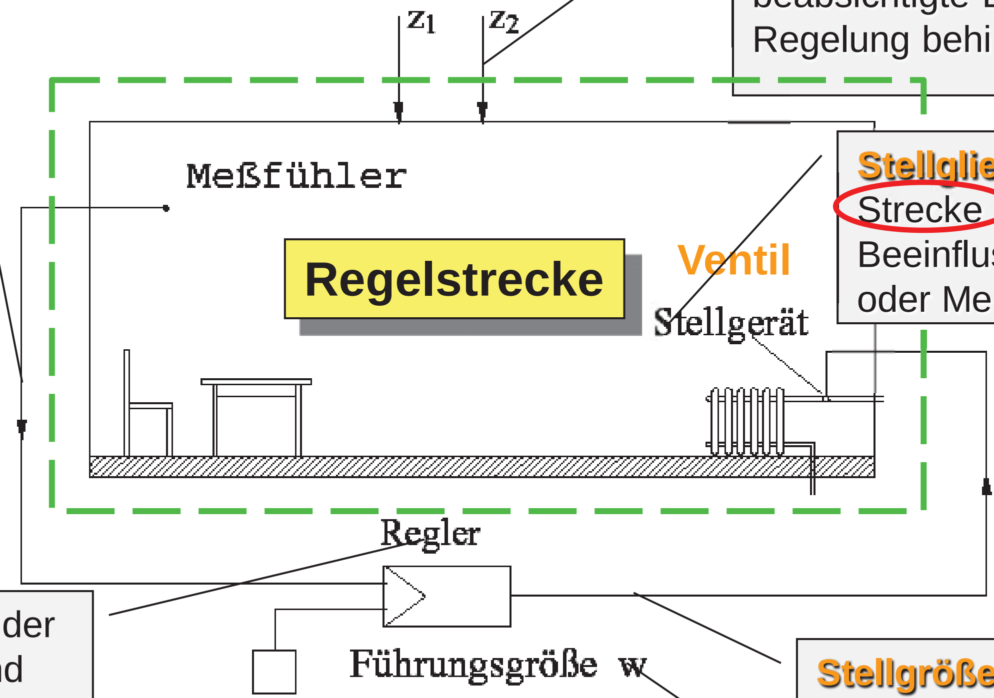
Am Beispiel einer typischen regelungstechnischen Aufgabe werden die Begriffe und ihre Zuordnung aufgezeigt.

Bezeichnungen und Definitionen (4)

Raumtemperaturregelung

Regelgröße: Größe, die unabhängig von äußeren Einflüssen auf einem gewünschten, festen oder veränderlichen Wert gehalten werden soll.

Störgröße: Jede auf eine Regelung einwirkende Größe, die die beabsichtigte Beeinflussung der Regelung behindert.



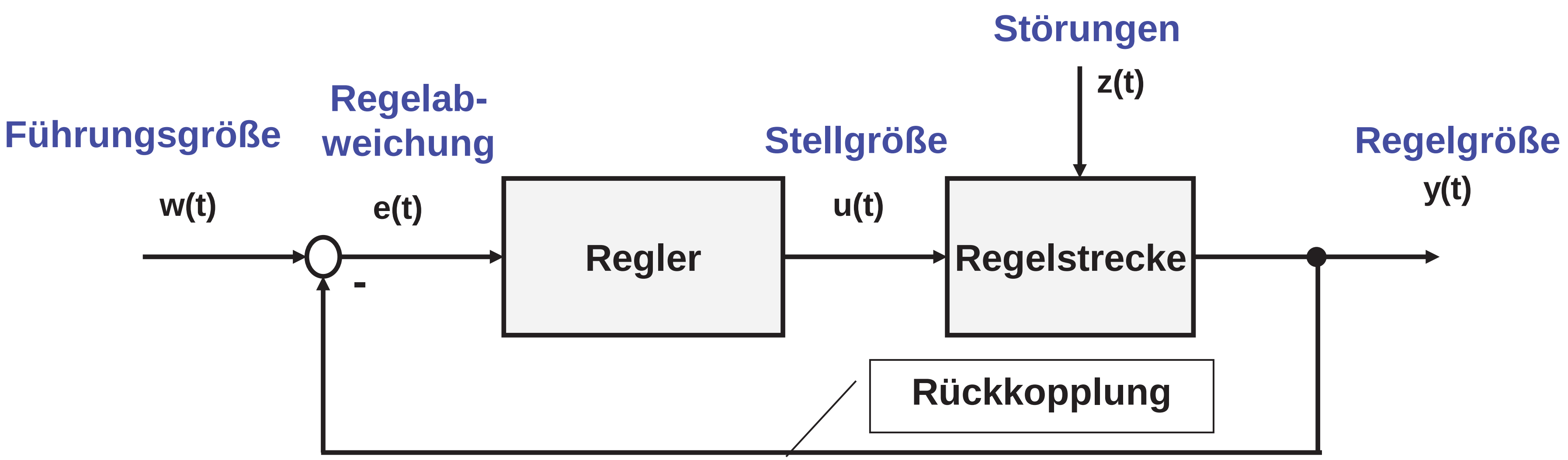
Stellglied: Ein am Eingang der Strecke liegendes Glied zur Beeinflussung eines Energie– oder Mengenstromes.

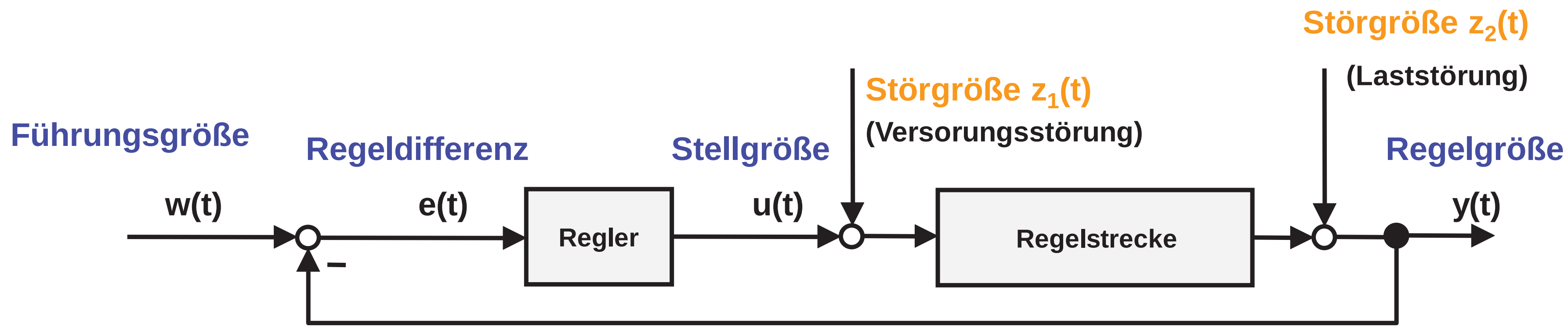
Regler: Gerät zur Erfassung der Differenz zwischen Istwert und Sollwert der Regelgröße und zur Betätigung des Stellgliedes.

Führungsgröße: Größe, die der Regeleinrichtung von außen zugeführt wird und der die Regelgröße folgen soll

Stellgröße: Größe, durch deren Änderung die Regelgröße beeinflusst werden kann. Mit der Stellgröße wird der Energie– und/oder Materialfluß in die Regelstrecke beeinflusst.

Grundstruktur einer Regelung





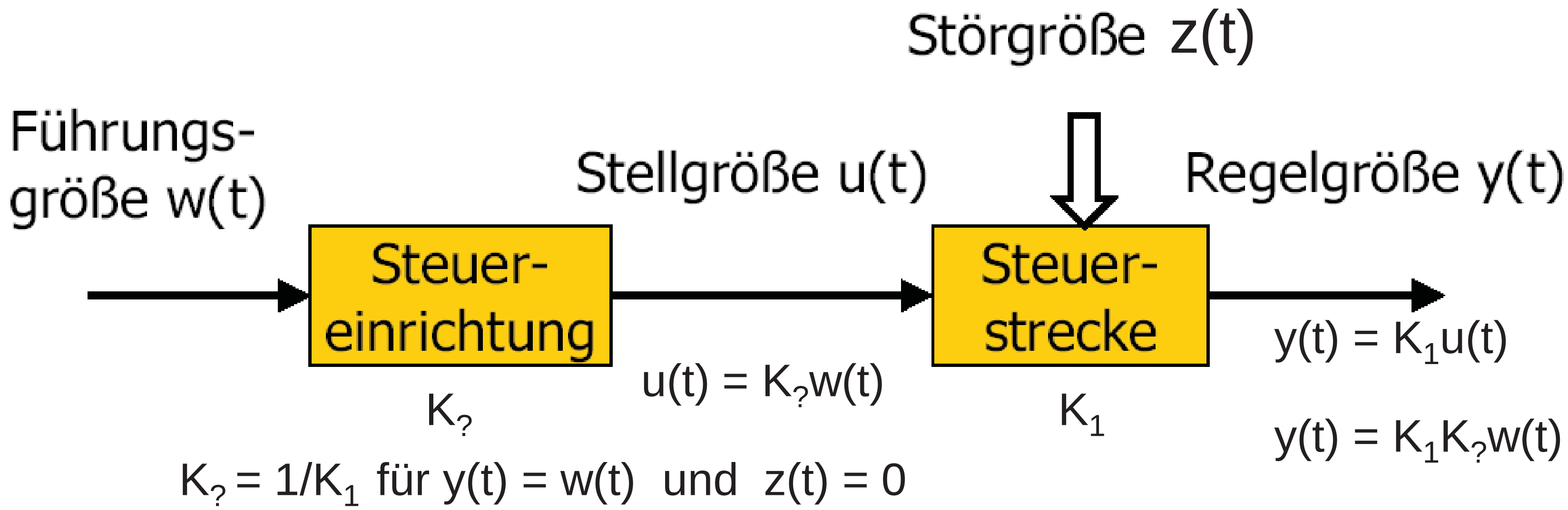
Prinzipielle Wirkungsweise der Regelung

1. **Messen:** Die Regelgröße wird direkt gemessen oder aus anderen Meßgrößen berechnet.

2. **Vergleichen:** Die Regelgröße wird mit der Führungsgröße verglichen und die Regelab-weichung berechnet.

3. **Stellen:** Aus der Regelabweichung wird die Stellgröße bestimmt.

Grundstruktur einer Steuerung

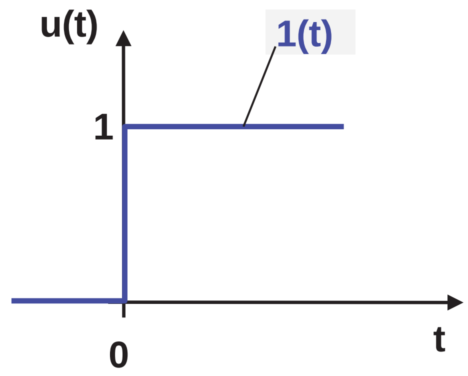


- Offene Wirkungskette (feedforward control, open loop control)
- Steuereinrichtung erhält keine Informationen über Störungen
- Dynamische Eigenschaften der Steuerstrecke müssen genau bekannt sein

Modellierung mit Testsignalen: Sprungfunktion

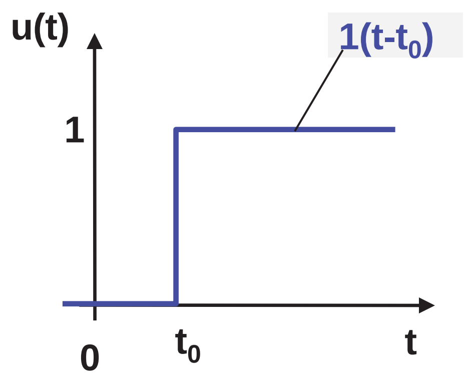
$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Definition: Sprungfunktion 1(t)
(Einheitssprungfunktion)



Graphische Darstellung

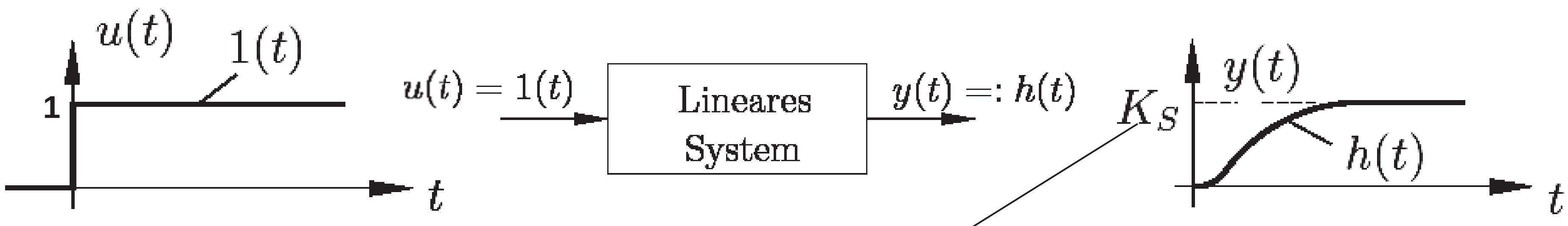
$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ 1 & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}$$



Zeitverschobene Sprungfunktion 1(t-t$_0$)

Sprungantwort

Definition 2.4 Ein dynamisches System sei zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ energiefrei, d.h. alle Anfangsbedingungen der beschreibenden Differentialgleichung sind Null. Die Systemantwort des durch die Einheitssprungfunktion $u(t) = 1(t)$ erregten Systems heißt die **Sprungantwort** oder Übergangsfunktion $h(t)$. □



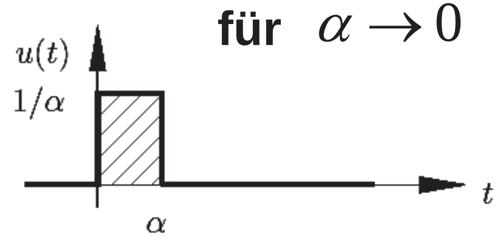
Sprungfunktion 1(t)

Sprungantwort h(t)

$$K_S = h(\infty) = \lim_{t \to \infty} h(t)$$

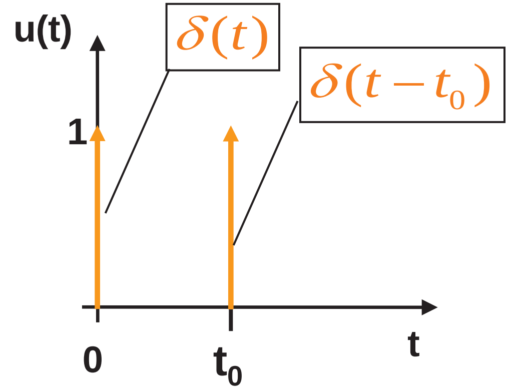
Systemverstärkung

$$u(t) = \frac{1}{\alpha}[1(t) - 1(t-\alpha)]$$



für $\alpha \to 0$ ⇒

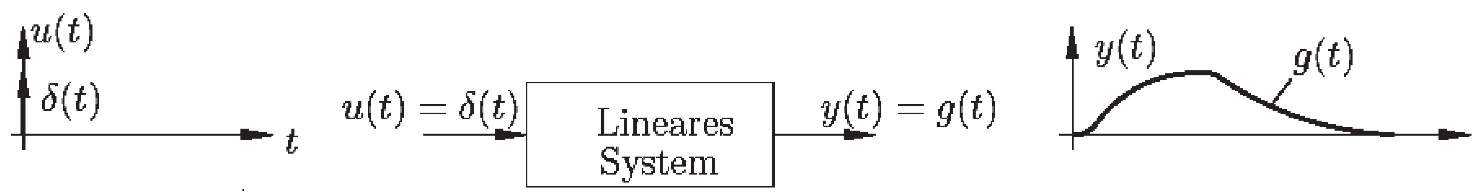
Dirac'scher Deltaimpuls $\delta(t)$



Recheckimpuls mit normierter Impulsfläche 1

Symbolische Darstellung

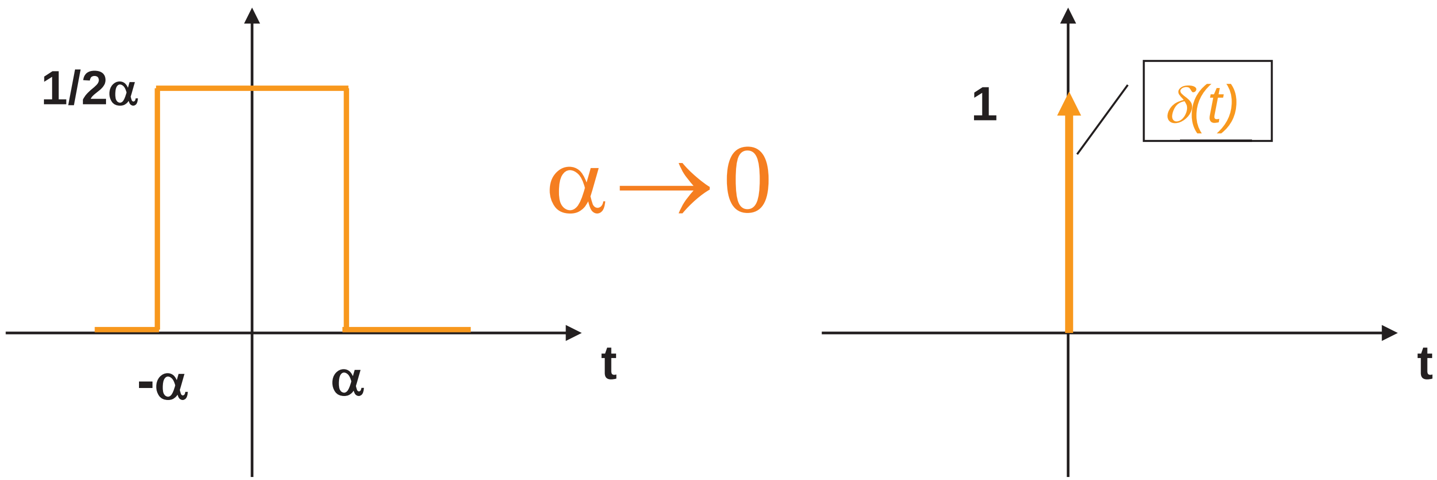
Definition 2.5
Die Systemantwort eines Systems bei Erregung durch $\delta(t)$ heißt: **Impulsantwort** oder Gewichtsfunktion $g(t)$. □



Dirac'scher Deltaimpuls $\delta(t)$

Gewichtsfunktion $g(t)$

Dirac'sche Deltafunktion



Die Deltafunktion ist eine Distribution oder verallgemeinerte Funktion

Ein von Null verschiedener Funktionswert ergibt sich nicht durch Einsetzen eines Argumentes, sondern durch eine Rechenvorschrift.

Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Faltungsintegral

Definition: $$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Eigenschaften:

- **Beschreibt die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal im Zeitbereich.**
- **Bestimmung des Ausgangssignals für beliebige Eingangssignale.**

Achtung: t ist eine Konstante

$$u(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow \quad y(t) = \int_0^t g(v)u(t-v)\mathrm{d}v$$

Gewichtsfunktion enthält die gesamte Information über das dynamische Verhalten eines linearen Systems.

Laplace-Transformation

Definition: Laplace-Transformierte

Ist $f(t)$ ein Signal mit der Eigenschaft $f(t) = 0$ für $t < 0$, so lautet die einseitige **Laplace-Transformierte:**

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Integraltransformation

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$$

Korrespondenzzeichen

Laplace-Operator: $s \equiv \sigma + j\omega$

Bezeichnungen:

$f(t)$: Originalfunktion, Zeitbereich

$F(s)$: Bildfunktion, Bildbereich, Laplace-Bereich

Nr.		Zeitfunktion	Transformierte	Voraussetzungen
1	Definition	$f(t)\cdot 1(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\cdot e^{st}\mathrm{d}s$	$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$	$c \geq \sigma_0$ [1]
2	Linearität	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$	$k_1, k_2 = \text{const.}$
3	Rechts-verschie-bungssatz	$f(t-a)\cdot 1(t-a)$	$e^{-as}\cdot F(s)$	$a > 0$, reell
4	Ähnlich-keitssatz	$f(at)$	$\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$, reell
5	Dämpfungs-satz	$e^{-at}\cdot f(t)$	$F(s+a)$	a beliebig
6	Differentia-tionssatz	$f^{(n)}(t)$	$s^n\cdot F(s) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} s^i\cdot f^{(n-1-i)}(+0)$	$f(t)$ sei $(n-1)$–mal stetig differenzierbar
7	Integra-tionssatz	$\int\limits_0^t \int\limits_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_{n-1}$	$\frac{1}{s^n}\cdot F(s)$	–
8	Faltungs-satz	$\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$	Re $s > \max.\sigma_{0_i}$ $i = 1,2$
9	Grenzwert-sätze	Anfangswertsatz: $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\cdot F(s)$ Endwertsatz: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\cdot F(s)$		Existenz der Grenzwerte

Tabelle A.1: Definition, Eigenschaften der Laplace–Transformation

Mit Hilfe einiger weniger dieser Eigenschaften lassen sich gewöhnliche lineare, zeitinvariante Differentialgleichungen in geschlossener Form *algebraisieren*, d. h. die die Dynamik eines Systems beschreibenden Differentialgleichungen werden damit in einfacher und geschlossener Form in sogenannte **Übertragungsfunktionen** überführt. Im folgenden werden einige dieser wichtigen Eigenschaften abgeleitet:

[3] Konvergenzabzsisse

4.5 Lösung von DGL durch Laplace-Transformation

Generelles Vorgehen:

1. $\mathcal{L}$-Transformation der DGL vom Zeit- in den Bildbereich
2. Lösung der resultierenden algebraischen Gleichung im Bildbereich
3. $\mathcal{L}^{-1}$-Rücktransformation der Lösung in den Zeitbereich

Beispiel:
gegebene DGL 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + 3 \cdot \dot{x}(t) + 2 \cdot x(t) = e^{-t} \text{ mit } x(0^+) = \dot{x}(0^+) = 0$$

Lösung mit $X(s) := \mathcal{L}(x(t))$:

1. $s^2 \cdot X(s) + 3 \cdot s \cdot X(s) + 2 \cdot X(s) = \frac{1}{s+1}$
2. $X(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+3 \cdot s+2} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$
3. $x(t) = e^{-2 \cdot t} - e^{-t} + t \cdot e^{-t}$

Übertragungsfunktion

Gegeben:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$

$$b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \ldots + b_m u^{(m)}(t) \quad ; m \leq n$$

Definition: Übertragungsfunktion

Die **Übertragungsfunktion** *G(s)* eines Systems bestimmt sich über das Verhältnis der Laplace-Transformierten seiner Ein- und Ausgangssignale:

$$G(s) \equiv \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

Y(s) und U(s) sind die Ein- und Ausgangsgrößen des Systems im Bildbereich, die durch G(s) miteinander verknüpft werden:

$$\boxed{Y(s) = G(s)\,U(s)}$$

Übertragungsfunktion (3)

Zusammenhang Gewichts- und Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion G(s) lässt sich über die Gewichtsfunktion g(t) durch die Laplace-Transformation bestimmen:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

Pole und Nullstellen

Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

lassen sich in Linearfaktoren (Fundamentalsatz der Algebra, Bronstein, 2003, S. 576) **zerlegen:**

Lösungen der Gleichung $Z(s) = 0$

$$Z(s) = b_0 + b_1 \cdot s^1 + \cdots + b_m \cdot s^m = b_m \prod_{j=1}^{m} (s - n_j)$$

Lösungen der Gleichung $N(s) = 0$

$$N(s) = a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n = a_n \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)$$

n_i : Nullstellen und
p_i : Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$

Tabelle 2.6: Verhalten der wichtigsten Regelkreisglieder

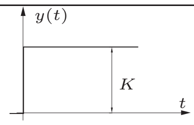
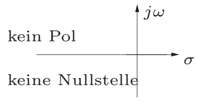
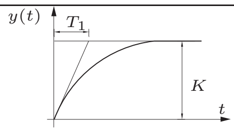
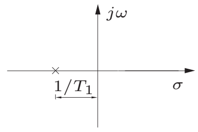
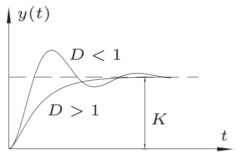
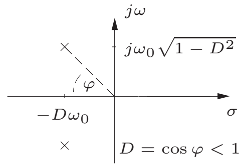
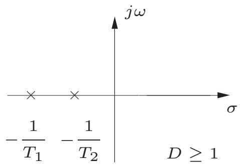
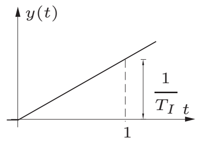
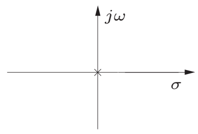
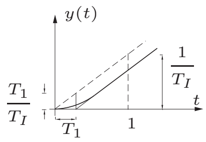
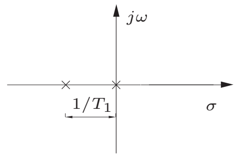
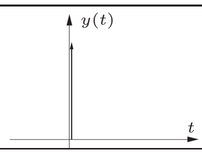
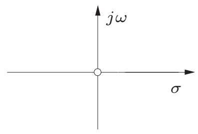
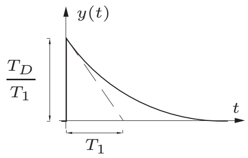
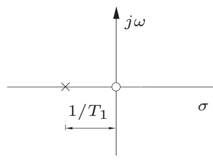
System	Zeitbereich Bildbereich (Übertragungsfkt.)	Übergangsfunktion	s–Ebene $\times$ Pol $\circ$ Nullstelle
P	$y(t) = K\,u(t)$ $G(s) = K$		
PT_1	$T_1\,\dot{y}(t) + y(t) = K\,u(t)$ $G(s) = K\dfrac{1}{1+T_1\,s}$		
PT_2	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \dfrac{2\,D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t)$ $= K\,u(t)$ $G(s) = K\dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega_0^2}s^2 + \dfrac{2\,D}{\omega_0}s + 1}$ $D < 1$: konjugiert komplexe Wurzeln der char. Gleichung $\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm j\sqrt{1-D^2})$ $D \geq 1$: reelle Wurzeln der char. Gleichung $\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm \sqrt{D^2-1}) = -1/T_{1,2}$		
I	$y(t) = \dfrac{1}{T_I}\displaystyle\int u\mathrm{d}t$ $G(s) = \dfrac{1}{T_I\,s}$		
IT_1	$T_1\,\dot{y}(t) + y(t) =$ $\dfrac{1}{T_I}\displaystyle\int u(t)\mathrm{d}t$ $G(s) = \dfrac{1}{T_I\,s(1+T_1\,s)}$		
D	$y(t) = T_D\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $G(s) = T_D\,s$		
DT_1	$T_1\dot{y}(t) + y(t) = T_D\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $G(s) = T_D\dfrac{s}{1+T_1\,s}$		

Tabelle 2.6: Fortsetzung

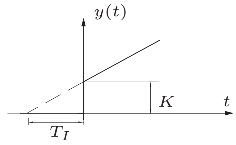
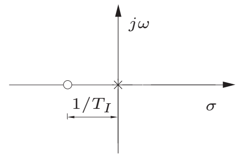
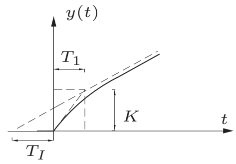
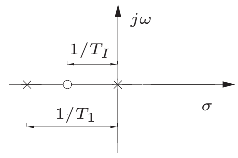
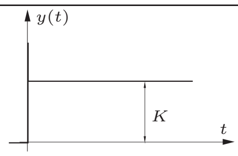
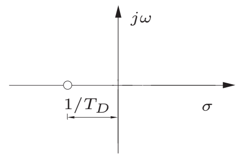
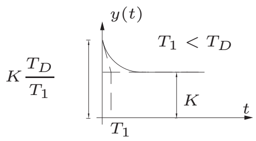
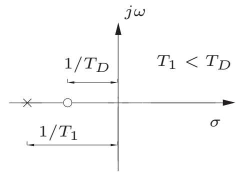
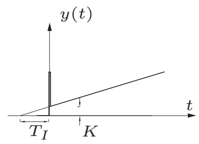
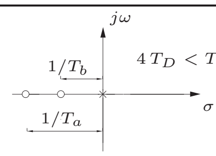
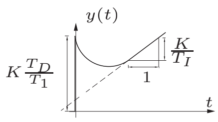
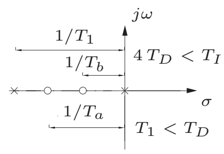
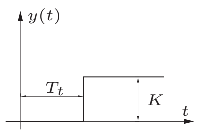
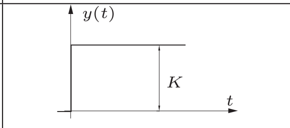
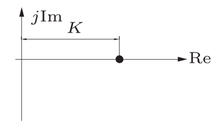
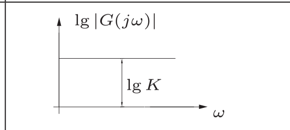
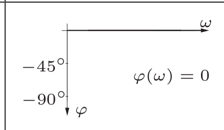
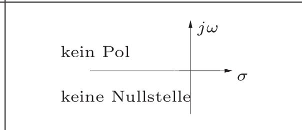
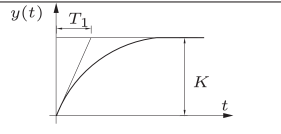
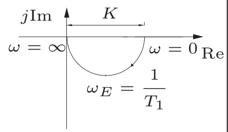
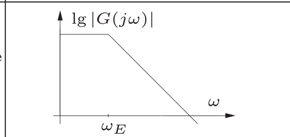
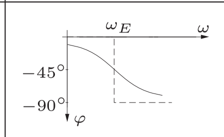
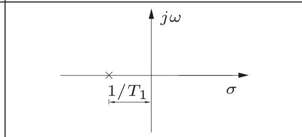
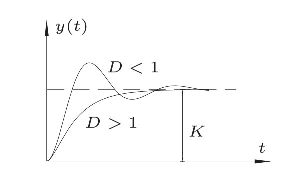
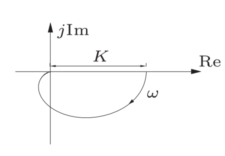
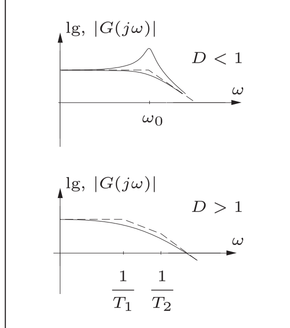
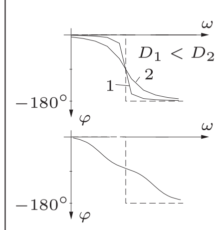
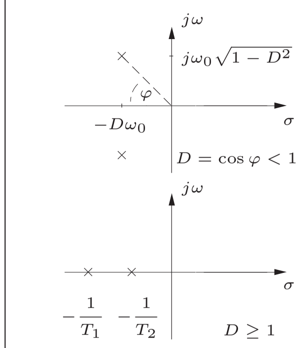
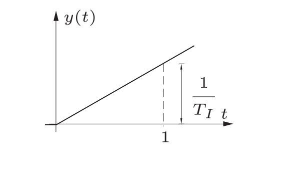
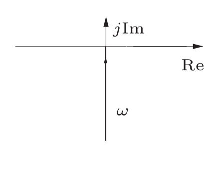
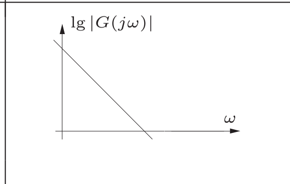
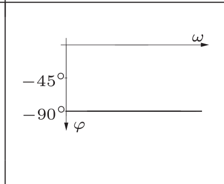
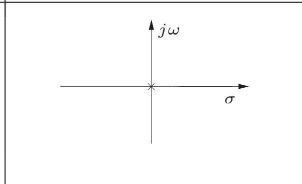
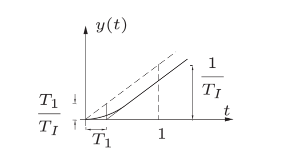
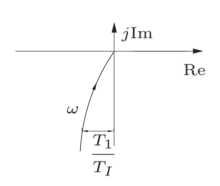
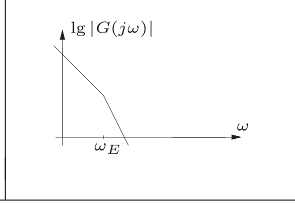
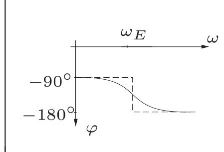
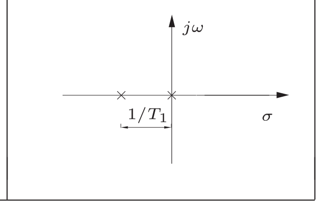
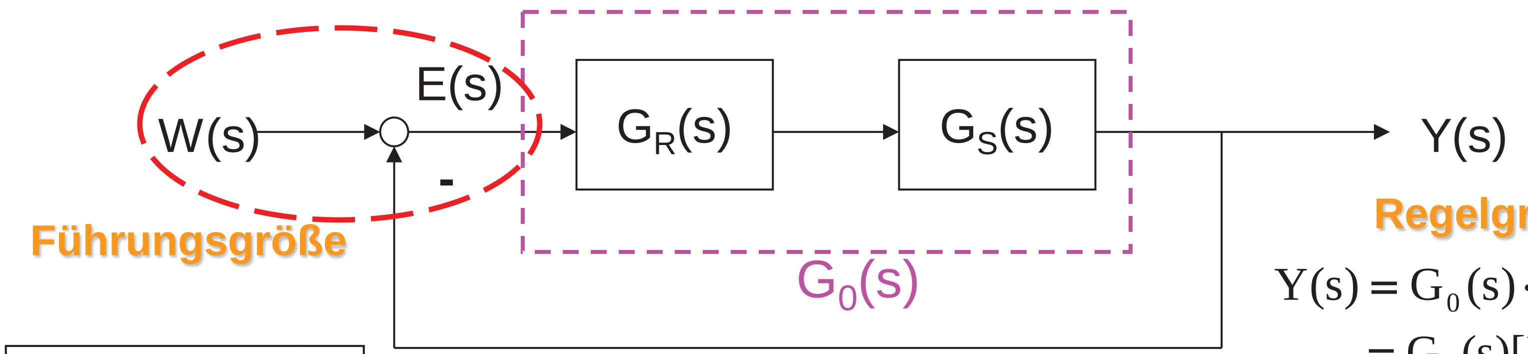
System	Zeitbereich Bildbereich (Übertragungsfkt.)	Übergangsfunktion	s–Ebene $\times$ Pol $\circ$ Nullstelle
PI	$y(t) = K\left[u(t) + \frac{1}{T_I}\int u(t)\mathrm{d}t\right]$ $G(s) = K\left[1 + \frac{1}{T_I\,s}\right]$		
PIT_1	$T_1\,\dot y(t) + y(t) =$ $K\left[u(t) + \frac{1}{T_I}\int u\mathrm{d}t\right]$ $G(s) = K\frac{1 + \frac{1}{T_I\,s}}{1 + T_1\,s}$		
PD	$y(t) = K\,[u(t) + T_D\dot u(t)]$ $G(s) = K\,[1 + T_D\,s]$		
PDT_1	$T_1\dot y(t) + y(t) =$ $K\,[u(t) + T_D\dot u(t)]$ $G(s) = K\frac{1 + T_D\,s}{1 + T_1\,s}$		
PID	$y(t) = K\left[u(t) + \frac{1}{T_I}\int u\mathrm{d}t + T_D\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right]$ $G(s) = K\left[1 + T_D\,s + \frac{1}{T_I\,s}\right]$		
$PIDT_1$	$T_1\dot y(t) + y(t) =$ $K\left[u(t) + \frac{1}{T_I}\int u\mathrm{d}t + T_D\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right]$ $G(s) = K\frac{1 + T_D\,s + \frac{1}{T_I\,s}}{1 + T_1\,s}$		
T_t	$y(t) = K\,u(t - T_t)$ $G(s) = K\,e^{-s\,T_t}$		Pole bei $-\infty$ Nullstellen bei $+\infty$

Tabelle 2.3: Verhalten der wichtigsten Regelkreisglieder

System	Zeitbereich Bildbereich	Übergangsfunktion	Ortskurve	Bode–Diagramm (Amplitudengang)	 (Phasengang)	s–Ebene × Pol ∘ Nullstelle
P	$y(t) = K\,u(t)$ $G(s) = K$					
PT_1	$T_1\,\dot y(t) + y(t) = K\,u(t)$ $G(s) = K\dfrac{1}{1+T_1\,s}$					
PT_2	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\ddot y(t) + \dfrac{2\,D}{\omega_0}\dot y(t) + y(t)$ $= K\,u(t)$ $G(s) = K\dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega_0^2}s^2 + \dfrac{2\,D}{\omega_0}s + 1}$ $D < 1$: konjugiert komplexe Wurzeln der char. Gleichung $\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm j\sqrt{1-D^2})$ $D \geq 1$: reelle Wurzeln der char. Gleichung $\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm \sqrt{D^2-1}) = -1/T_{1,2}$					
I	$y(t) = \dfrac{1}{T_I}\displaystyle\int u\mathrm{d}t$ $G(s) = \dfrac{1}{T_I\,s}$					
IT_1	$T_1\,\dot y(t) + y(t) =$ $\dfrac{1}{T_I}\displaystyle\int u(t)\mathrm{d}t$ $G(s) = \dfrac{1}{T_I\,s(1+T_1\,s)}$					

Führungsübertragungsfunktion



$$Y(s) = G_0(s) \cdot E(s)$$
$$= G_0(s)[W(s) - Y(s)]$$
$$= G_0(s)W(s) - G_0(s)Y(s)$$

Definition:

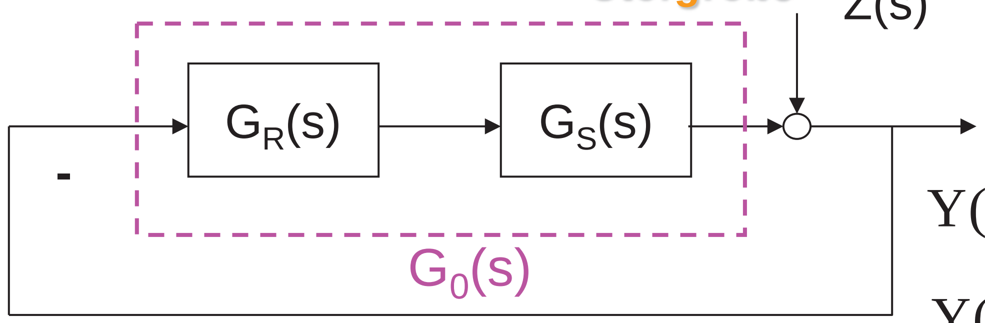
Die **Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$** gibt die Wirkung der Führungsgröße **W(s)** auf die Regelgröße **Y(s)** an. Für den Standard-Regelkreis berechnet sie sich durch:

$$Y(s)[1 + G_0(s)] = G_0(s)W(s) \quad \Rightarrow \quad G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

Führungsverhalten: $Y(s) = G_W(s) \cdot W(s)$

Regelungsaufgabe: $Y(s) := W(s) \quad \Rightarrow \quad G_W(s) = 1$

Störübertragungsfunktion



$$Y(s) = Z(s) - G_0(s) \cdot Y(s)$$

$$Y(s)[1 + G_0(s)] = Z(s)$$

Definition:

Mit der **Störübertragungsfunktion $G_z(s)$** lassen sich die Wirkungen der externen Störungen **Z(s)** auf die Regelgröße **Y(s)** berechnen. Für den Standard-Regelkreis lautet sie:

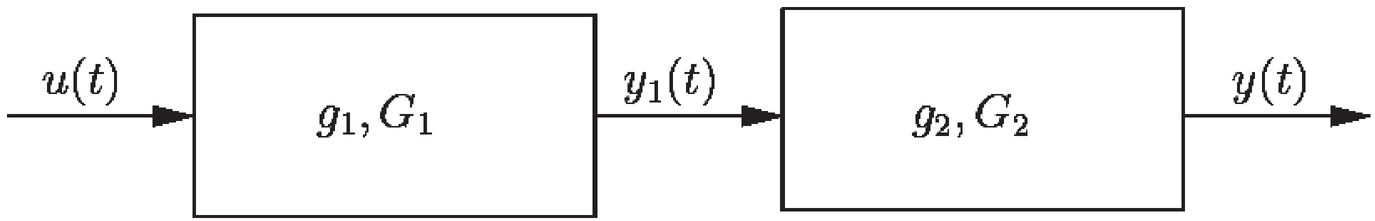
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

Störverhalten: $Y(s) = G_z(s) \cdot Z(s)$

Regelungsaufgabe: $Y(s) := 0 \quad \Rightarrow \quad G_z(s) = 0$

Anwendung des Faltungssatzes

Reihenschaltung zweier Systeme



Lösung im Zeitbereich (Faltungsintegral)

$$y(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty g_1(v) \cdot g_2(\tau) \cdot u(t - \tau - v) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}v$$

Lösung im Bildbereich (Faltungssatz)

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Faltungssatz stellt die Grundlage der Blockschaltbildalgebra dar (Tabelle A.1).

Negative Feedback Amplifier

Harold S. Black (1898-1983)

Aufbau eines transkontinentalen Telefon-netzes mit 4 Kanälen im Jahr 1923 durch AT&T

Problem: **Verzerrungen in Reihenschal-tungen von Röhrenverstärker durch Nichtlinearitäten und Verstärkungs-änderungen.**

Lösung: **Negative Feedback Amplifier**

Patent eingereicht 1928

Verstärker werden ab 1931 eingesetzt

Patent erteilt 1937

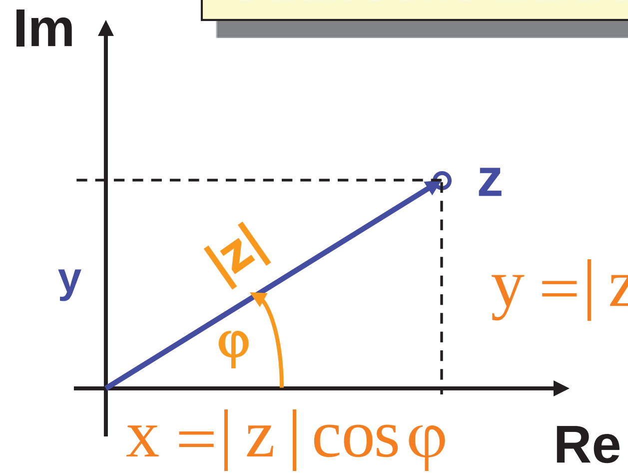
Komplexe Zahlen

Kartesische Koordinaten

$$z = x + jy$$

Darstellung als Zeiger (Vektor) in der komplexen Zahlenebene (Gaußschen Zahlenebene).

Gaußsche Zahlenebene



$$y = |z| j\sin\varphi$$

$$x = |z| \cos\varphi$$

Polarkoordinaten

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Exponentialform

Aus der Eulersche Identität

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$

folgt $z = |z| e^{j\varphi}$