Aufgabe 7.1

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenwerte: $\det(A - \lambda I_{2\times2}) = 0$

$$\det(A - \lambda I_{2\times2}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{2} + \lambda^2 - \frac{1}{2}$$

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1/2 \pm \sqrt{1/4 + 4/2}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 1 \\ \searrow \lambda_2 = -1/2 \end{matrix}$$

∘ Eigenvektor: $(A - \lambda_i I)\, v_i = 0$

Zugehörigen Eigenvektor:

$* \lambda_1 = 1$, $(A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = 0, \quad v_{1,1} = v_{1,2} \Rightarrow v_1 = [1 \quad 1]^T$$

Zugehörigen Eigenvektor:

$* \lambda_2 = -1/2$ $\quad (A - \lambda_2 I)\, v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = 0, \quad v_{2,1} = 2 v_{2,2} \Rightarrow v_2 = [-2 \quad 1]^T$$

∘ ausreichende Anzahl von Eigenvektoren:

↳ <u>diagonalisierbar</u>

Transformationsmatrix: $T = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad //$$

Diagonale System: $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!}, \quad J^2 = J.J = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-1/2)^2 \end{pmatrix}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^k \cdot t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} //$$

weil $e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!}$ ist. Da die Matrix J diagonal ist, könnten wir einfach die Formel

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

verwenden.

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^t & -2e^{-t/2} \\ e^t & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^t + 2e^{-t/2} & 2e^t - 2e^{-t/2} \\ e^t - e^{-t/2} & 2e^t + e^{-t/2} \end{pmatrix} //$$

$$\phi(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^t + 2e^{-t/2} & 2e^t - 2e^{-t/2} \\ e^t - e^{-t/2} & 2e^t + e^{-t/2} \end{pmatrix} //$$

Probe : $t = 0 \rightarrow \phi(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^0 + e^0 \cdot 2 & 2e^0 - 2e^0 \\ e^0 - e^0 & 2e^0 + e^0 \end{pmatrix} =$

$$\phi(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2x2} \quad ✓$$

$$* \quad \dot{\phi}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \cdot e^t + \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \cdot e^{-t/2} & 2 \cdot 1 \cdot e^t - 2\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t/2} \\ 1 \cdot e^t - \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t/2} & 2 \cdot 1 \cdot e^t + \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t/2} & 2e^t + e^{-t/2} \\ e^t + \frac{e^{-t/2}}{2} & 2e^t - \frac{1}{2} e^{-t/2} \end{pmatrix} //$$

$$A \cdot \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t + 2e^{-t/2} & 2e^t - 2e^{-t/2} \\ e^t - e^{-t/2} & 2e^t + e^{-t/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t/2} & 2e^t + e^{-t/2} \\ e^t + \frac{e^{-t/2}}{2} & 2e^t - \frac{e^{-t/2}}{2} \end{pmatrix} //$$

$$\therefore \quad \dot{\phi}(t) = A\phi(t) \quad ✓$$