

Beschreibung und Analyse dynamischer Systeme im Zustandsraum

- **Methoden zur Berechnung der Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{At}$**
 - Numerische Integration
 - Reihenentwicklung
 - Mit Hilfe der Diagonalform der Systemmatrix **A**
 - Mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation
 - Berechnung mit Matlab (Skalierung und Quadrierung)
- **Lösung der „Zustandsgleichung im Frequenzbereich“.**

$$G(s) = \mathbf{c}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \mathcal{L}\{\mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b}\}$$



Beschreibung und Analyse dynamischer Systeme im Zustandsraum

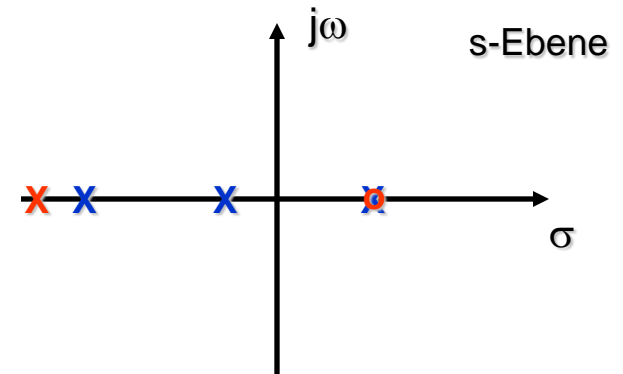
➤ Stabilitätsanalyse im Zustandsraum

- **Asymptotische Stabilität** (Realteile der Eigenwerte λ_i der Systemmatrix $\mathbf{A} < 0$).
- **BIBO-Stabilität** (ein asymptotisch stabiles System ist auch BIBO-stabil, **Umkehrung gilt nicht, da die Gewichtsfunktion $g(t)$ Eigenbewegungen des Zustandsraummodell, die nicht steuer- und/oder beobachtbar sind, nicht enthält**) .



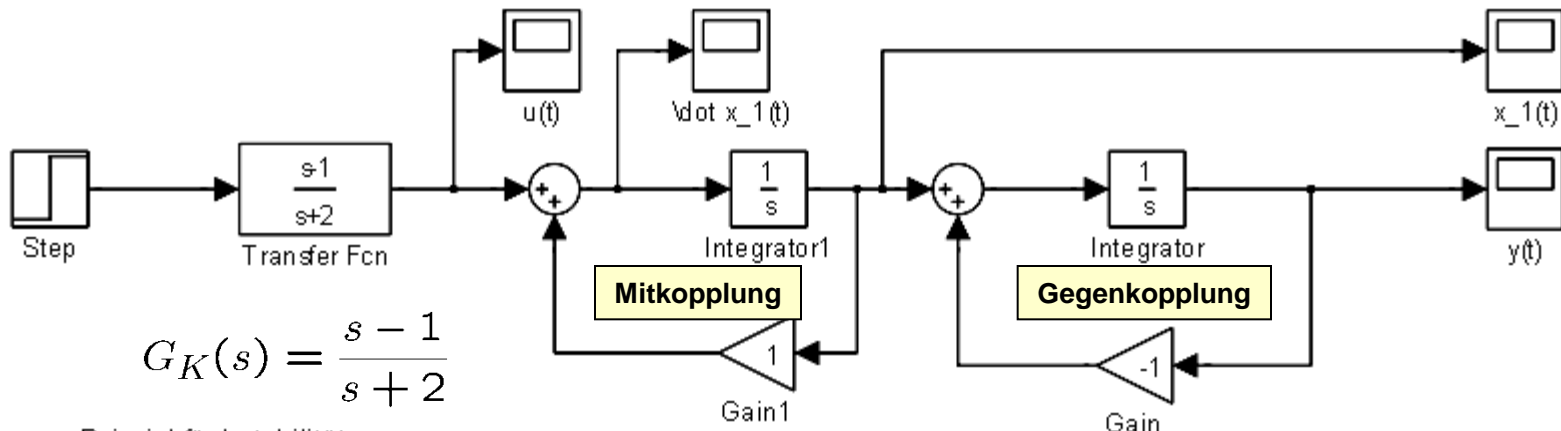
Mit Hilfe der **Zustandsraumdarstellung** und des Konzeptes der **Steuer- und Beobachtbarkeit** konnte Rudolph Kalman zum Ende der 50er Jahre erstmals folgende Frage anschaulich beantworten:

Warum ist es nicht möglich, ein **instabiles** System durch eine **perfekte** Pol- Nullstellenkompensation in der **rechten** s-Halbebene zu stabilisieren?



Die **Ordnung** der **Übertragungsfunktion** ist dann jedoch **kleiner** als die Systemordnung (die **Anzahl** der konzentrierten **Energiespeicher**) und die **instabilen Eigenbewegungen** können entweder mit Hilfe von Stellsignalen nicht mehr **beeinflusst** werden (nicht steuerbar) oder/(und) sind im Ausgangssignal nicht mehr **sichtbar** (nicht beobachtbar).

Beispiel, dass eine Stabilisierung durch eine Pol-Nullstellenkompensation in der rechten s-Halbebene nicht möglich ist !!!!!



$$G_K(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

Beispiel für Instabilität durch Pol-Nullstellenkompensation

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_K(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{\cancel{s-1}}{s+2} \cdot \frac{1}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$



Definition 3.4 (Zustandssteuerbarkeit)

Ein dynamisches System (\mathbf{A}, \mathbf{b}) heißt vollständig zustandssteuerbar (*z-steuerbar*), wenn der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ durch eine geeignete Steuerfunktion $u(t)$ in einer endlichen Zeitspanne $[t_0, t_e]$ von jedem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ in den Nullzustand $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{0}$ überführt werden kann.

Definition 3.5 (Zustandserreichbarkeit)

Ein dynamisches System (\mathbf{A}, \mathbf{b}) heißt vollständig erreichbar, wenn der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ durch eine geeignete Steuerfunktion $u(t)$ in einer endlichen Zeitspanne $[t_0, t_e]$ aus dem Nullzustand $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ in jeden gewünschten Endzustand $\mathbf{x}(t_e)$ überführt werden kann.

Die Erreichbarkeit stellt im Vergleich zur Steuerbarkeit eigentlich **höhere Anforderungen** an die Eigenschaften eines dynamischen Systems.

Bei **linearen, zeitinvarianten** Systemen muss **nicht** zwischen **Steuer-** und **Erreichbarkeit** unterschieden werden.

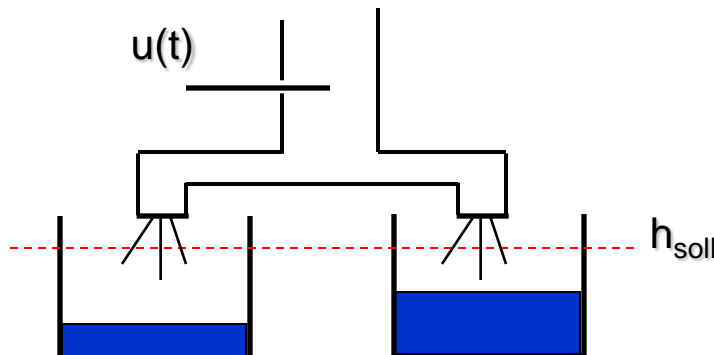


Heißluftballon

Lediglich die **Höhe** eines Heißluftballons kann durch den Brenner gezielt beeinflusst werden.



Parallelschaltung von Systemen mit gleichen dynamischen Eigenschaften



Die Wasserstände in den beiden Behältern können nicht **unabhängig** voneinander eingestellt werden.

Satz 3.2 (Steuerbarkeitskriterien)

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) Kalman-Kriterium

dann und nur dann vollständig z-steuerbar, wenn für die $(n \times n)$ Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang} [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = n \quad (3.37)$$

Der Rang der **Steuerbarkeitsmatrix** gibt die Anzahl der steuerbaren Zustandsgrößen an.

a2) Hautus-Kriterium

Überprüfung der einzelnen Eigenwerte auf Steuerbarkeit

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S^* = \text{Rang} [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{b}]_{\lambda=\lambda_i} = n \quad (3.38)$$

Man sagt dann auch, dass der Eigenwert λ_i nicht steuerbar ist !!

mit $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ den Eigenwerten von \mathbf{A} .

Ist die Bedingung nicht erfüllt, so kann die zugehörige Eigenbewegung nicht beeinflusst werden.



Zustandsmodell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

Das System ist vollständig z-steuerbar für $b_1, b_2 \neq 0$

Überprüfung der Steuerbarkeit mit Hilfe des Kalman-Kriteriums

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s &= [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \det \mathbf{Q}_s = 2b_1b_2 - b_1b_2 = b_1b_2$$

Rang $\mathbf{Q}_s = 2 = n$
für $b_1, b_2 \neq 0$

für $b_1 \neq 0$

Überprüfung der Steuerbarkeit mit Hilfe des Hautus-Kriteriums

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$$\mathbf{Q}_s^* = [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{b}] \Rightarrow$$

$$\text{Rang}[\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} = 2$$

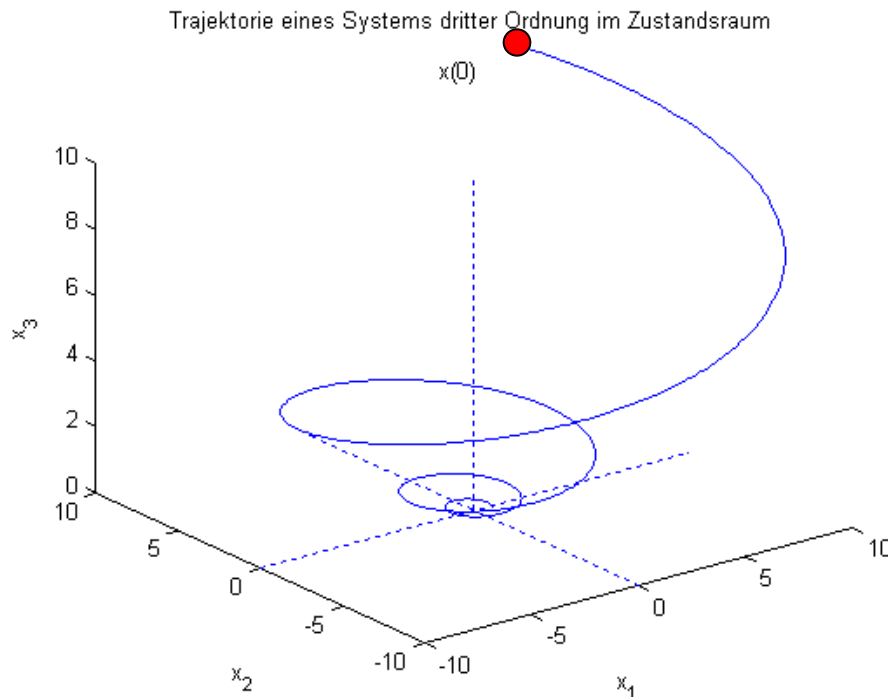
für $b_2 \neq 0$

$$\text{Rang}[\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \text{Rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} = 2$$



Definition 3.7 Beobachtbarkeit

Das dynamische System (3.1) heißt vollständig beobachtbar im Intervall $[t_0, t_e]$, wenn für gegebene t_0 und t_e jeder Systemzustand $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ aus der Kenntnis der Einganggröße $u(t)$ und der Ausganggröße $y(t)$ in $[t_0, t_e]$ ermittelt werden kann. \square



Satz 3.4 (Beobachtbarkeitskriterien)

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) (Kalman Kriterium)

dann und nur dann vollständig beobachtbar, wenn gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_B = \text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{A}^T \mathbf{c} & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c} \end{bmatrix} = n \quad (3.42)$$

Der Rang der **Beobachtbarkeitsmatrix** gibt die Anzahl der beobachtbaren Zustandsgrößen an.

a2) (Hautus-Kriterium)

Überprüfung der einzelnen Eigenwerte auf Beobachtbarkeit

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_B^* = \text{Rang} \left[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{c} \right]_{\lambda=\lambda_i} = n \quad (3.43)$$

Man sagt dann auch, dass der Eigenwert λ_i nicht beobachtbar ist

mit $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ den Eigenwerten von \mathbf{A} .

Ist die Bedingung für einen Eigenwert nicht erfüllt, so kann die zugehörige Eigenbewegung nicht beobachtet werden.



Satz 3.2 (Steuerbarkeitskriterien)

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) (Kalman-Kriterium)

dann und nur dann vollständig z-steuerbar, wenn für die $(n \times n)$ Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = n \quad (3.37)$$

Satz 3.4 (Beobachtbarkeitskriterien)

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) (Kalman Kriterium)

dann und nur dann vollständig beobachtbar, wenn gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_B = \text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{A}^T\mathbf{c} & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c} \end{bmatrix} = n \quad (3.42)$$

Duales System

Mit Hilfe der transponierten Matrizen bzw. Vektoren A^T, b^T, c eines Zustandsmodells (A, b, c^T) lässt sich das sogenannte **duale System** bilden:

$$\begin{array}{lcl}
 \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) & \longrightarrow & \dot{\tilde{x}}(t) = A^T \tilde{x}(t) + c\tilde{u}(t) \\
 y(t) = c^T x(t) + du(t) & & \tilde{y}(t) = b^T \tilde{x}(t)
 \end{array}$$

Originalsystem

Duales System

Satz 3.5 (Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit)

Ein zeitinvariantes System (3.1) ist vollständig zustandssteuerbar (beobachtbar), wenn sein duales System (3.51) vollständig beobachtbar (zustandssteuerbar) ist.

Ein Programm zur Überprüfung der Steuerbarkeit kann auch zur Überprüfung der Beobachtbarkeit eingesetzt werden.



Die ein **reales** physikalisches System beschreibenden Zustandsmodelle sind häufig numerisch **schlecht konditioniert**, d.h. die Elemente der Systemmatrizen weisen große Betragsunterschiede auf:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 .000\text{D}+00 & .100\text{D}+01 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 \\
 -.545\text{D}+06 & -.689\text{D}+00 & .545\text{D}+06 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 \\
 .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .100\text{D}+01 & .000\text{D}+00 \\
 .167\text{D}+06 & .000\text{D}+00 & -.167\text{D}+06 & -.791\text{D}+00 & \underline{.985\text{D}-03} \\
 .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & \underline{-.281\text{D}+08} & \cancel{-.167\text{D}+03}
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}
 .000\text{D}+00 \\
 .320\text{D}-02 \\
 .000\text{D}+00 \\
 .000\text{D}+00 \\
 .000\text{D}+00
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix}
 .100\text{D}+01 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00
 \end{bmatrix}$$

Betragsunterschied von
11 Zehnerpotenzen

Zustandsmodell eines elektrischen Vertikaltriebes einer Zahrad-schleifmaschine auf der Basis der physikalischen Einheiten **kg, m, s**.



Die in der Standardliteratur angegebenen Analyse- und Syntheseverfahren für Systeme in einer Zustandsraumdarstellung sind oft für eine **numerische** Untersuchung weniger gut geeignet:

Beispiel: Kalmankriterium

Matlab-Rechengenauigkeit: $\text{eps} = 2^{-52}$
 $\text{eps} = 0.22204\text{D-15}$

$$Q_S = [b, Ab, A^2b, A^3b, A^4b]$$

$$= \begin{bmatrix} .000\text{D}+00 & .320\text{D}-02 & \underline{-.221\text{D}-02} & -.174\text{D}+04 & .240\text{D}+04 \\ .320\text{D}-02 & -.221\text{D}-02 & -.174\text{D}+04 & .240\text{D}+04 & .124\text{D}+10 \\ .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .534\text{D}+03 & -.791\text{D}+03 \\ .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .534\text{D}+03 & -.791\text{D}+03 & -.395\text{D}+09 \\ .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & .000\text{D}+00 & -.150\text{D}+11 & \underline{.253\text{D}+13} \end{bmatrix}$$

Betragsunterschied von 15 Zehnerpotenzen

Eine zuverlässige numerische Rangbestimmung ist nicht möglich



Verbesserung der Kondition von A,b,c durch Skalierung

Unter Skalierung versteht man eine Angleichung der Beträge der Matrixelemente zur Verbesserung der numerischen Kondition:

Skalierung von **A,b,c** durch Anwendung einer Zustandstransformation

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

mit einer diagonalen Transformationsmatrix **D** liefert:

$$\mathbf{D}^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad y(t) = \underbrace{\mathbf{c}^T\mathbf{D}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{c}}^T}\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{b}}_{\tilde{\mathbf{b}}}u(t) \quad y(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t)$$



Skalierung durch eine günstige Wahl der physikalischen Einheiten der Zustandsgrößen:

Ändern der Einheit der Zustandsgröße $x_5(t)$ (Kraft, die auf die Werkzeugspindel wirkt) von [N] auf [kN] durch Transformation mit:

$$D = \text{diag} [1, 1, 1, 1, 10^{-3}]$$



$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} .000D+00 & .100D+01 & .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 \\ -.545D+06 & \underline{-.689D+00} & \underline{.545D+06} & .000D+00 & .000D+00 \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & .100D+01 & .000D+00 \\ .167D+06 & .000D+00 & -.167D+06 & -.791D+00 & .985D+00 \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & -.281D+05 & -.167D+03 \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} .000D+00 \\ .320D-02 \\ .000D+00 \\ .000D+00 \\ .000D+00 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} .100D+01 & .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 \end{bmatrix}.$$

$$Q_S = [\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b}, \tilde{A}^4\tilde{b}]$$

$$= \begin{bmatrix} .000D+00 & .320D-02 & \underline{-.221D-02} & -.174D+04 & .240D+04 \\ .320D-02 & -.221D-02 & -.174D+04 & .240D+04 & .124D+10 \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & .534D+03 & -.791D+03 \\ .000D+00 & .000D+00 & .534D+03 & -.791D+03 & -.395D+09 \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & -.150D+08 & \underline{.253D+10} \end{bmatrix}$$

Bei einem Betragsunterschied von 12 Zehnerpotenzen ist eine numerische Rangbestimmung gerade wieder möglich.



Skalierung mit Hilfe der MATLAB-Funktion **SSBAL**

Optimale Skalierung mit einer diagonalen Transformationsmatrix, deren Elemente **ganzzahlige Potenzen der Rechnerbasis** sind:

$$D^{-1} = \text{diag} [2^{-9}, 2^1, 2^{-10}, 2^{-1}, 2^{16}]$$



$$\bar{A} = \begin{bmatrix} .000D+00 & \underline{.102D+04} & .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 \\ -.532D+03 & \underline{-.689D+00} & .266D+03 & .000D+00 & .000D+00 \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & .512D+03 & .000D+00 \\ .654D+03 & .000D+00 & -.326D+03 & -.791D+00 & .129D+03 \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & -.214D+03 & -.167D+03 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} .000D+00 \\ .160D-02 \\ .000D+00 \\ .000D+00 \\ .000D+00 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}^T = [.195D-02 \quad .000D+00 \quad .000D+00 \quad .000D+00 \quad .000D+00]$$

$$Q_S = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \bar{A}^2\bar{b}, \bar{A}^3\bar{b}, \bar{A}^4\bar{b}]$$

$$= \begin{bmatrix} .000D+00 & .164D+01 & -.113D+01 & -.891D+06 & .123D+07 \\ .160D-02 & \underline{-.110D-02} & -.872D+03 & .120D+04 & .621D+9 \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & .547D+06 & -.810D+06 \\ .000D+00 & .000D+00 & .107D+04 & -.158D+04 & \underline{-.791D+9} \\ .000D+00 & .000D+00 & .000D+00 & -.229D+06 & .386D+08 \end{bmatrix}$$

Nochmalige Reduzierung der Betragsunterschiede und Angleichung der Zeilennormen ermöglichen eine zuverlässige numerische Rangbestimmung.



Es ist bekannt, dass bei der numerischen Berechnung von mehrfachen Eigenwerte relativ große Fehler auftreten können !

Beispiel 1:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Doppelter Eigenwert bei $\lambda = 3$

Eigenwerte:

3.0000e+000 +2.9802e-008i
3.0000e+000 -2.9802e-008i

Beispiel 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Dreifacher Eigenwert bei $\lambda = 0$

Eigenwerte:

-8.2698e-006
4.1349e-006 +7.1618e-006i
4.1349e-006 -7.1618e-006i

Eigenwerte sind die Lösung der Gleichung $\lambda^3 = \text{eps}$ und nicht von $\lambda^3 = 0$



Der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ eines Zustandsraummodells kann durch eine Transformation $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t)$ in einen Vektor überführt werden, der aus vier Teilvektoren besteht:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{x}}_1(t) \ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \ \tilde{\mathbf{x}}_3(t) \ \tilde{\mathbf{x}}_4(t)]^T$$

$\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$: die vollständig steuerbaren, aber nicht beobachtbaren Zustandsgrößen

$\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$: die vollständig steuerbaren und vollständig beobachtbaren Zustandsgrößen

$\tilde{\mathbf{x}}_3(t)$: die vollständig beobachtbaren, aber nicht vollständig steuerbaren Zustandsgrößen

$\tilde{\mathbf{x}}_4(t)$: die nicht steuerbaren und nicht beobachtbaren Zustandsgrößen

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \ , \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \ , \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T}$$

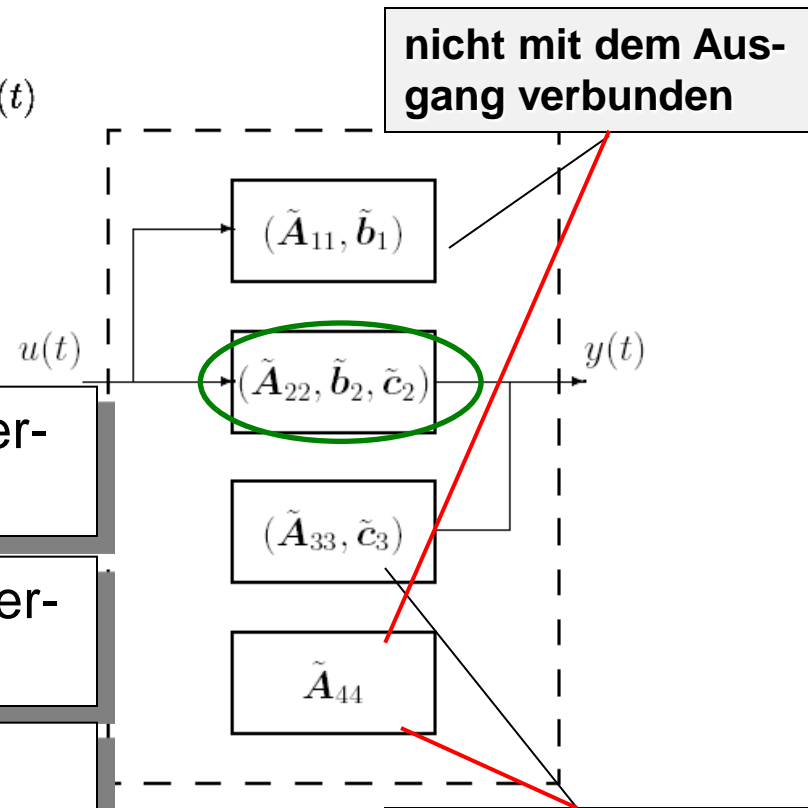


Zustandsmodell

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0^T \quad \tilde{c}_2^T \quad \tilde{c}_3^T \quad 0^T] \tilde{x}(t) .$$

Blockschaltbild



nicht mit dem Ausgang verbunden

nicht mit dem Eingang verbunden

Das System $(\tilde{A}_{11}, \tilde{b}_1)$ ist nur vollständig steuerbar.

Das System $(\tilde{A}_{22}, \tilde{b}_2, \tilde{c}_2)$ ist vollständig steuer- und beobachtbar.

Das System $(\tilde{A}_{33}, \tilde{c}_3)$ ist nur vollständig beobachtbar.

Der Teil (\tilde{A}_{44}) ist weder steuer- noch beobachtbar.



Alleine der vollständig steuerbare und beobachtbare Systemteil $(\tilde{\mathbf{A}}_{22}, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_2)$ wird durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \mathbf{b} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

beschrieben.

Nur für ein vollständig steuer- und beobachtbares System $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ist die Zahl der Pole von $G(s)$, d. h. der Grad des Nennerpolynoms, $N(s)$ gleich der Anzahl der Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} .

Ist das System nicht vollständig steuer- und/oder beobachtbar, dann haben das Zähler- und Nennerpolynom von $G(s)$ gemeinsame Wurzeln, d. h. durch entsprechende Linearfaktoren kann gekürzt werden.

Damit hat dann das System weniger Pole als Eigenwerte.



Steuerbarkeitsprüfung mit der Matlab-Funktion ctrbf

```
% RT: Überprüfung der Steuerbarkeit mit Hilfe der Kalman-Zerlegung
% Beispiel 4.1 aus Svaricek, F.: Zuverlaessige numerische Analyse linearer
% Regelungssysteme, Teubner Verlag, 1995.
```

```
% Systemmatrix A
```

```
%
A=[-1 0 0 0
    0 1 0 0
    0 0 1 0
    0 0 1 -1]
```

```
%
```

```
% Eingangsmatrix b
```

```
%
```

```
b=[ 1 1 1 0]'
```

```
%
```

```
% Ausgangsmatrix c
```

```
%
```

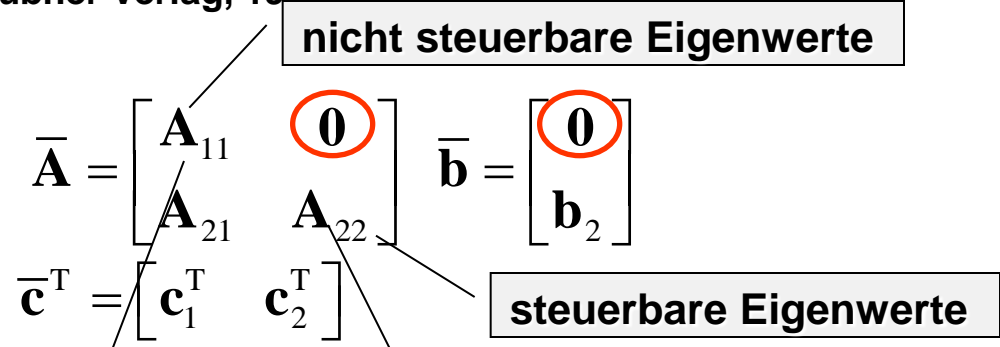
```
c=[1 1 0 -2]
```

```
%
```

```
% Berechnung der Steuerbarkeits-Zerlegung
```

```
%
```

```
[Abar, bbar,cbar, T, k] = ctrbf(A,b,c)
```



Abar =				bbar =	
0.30151	-1.3015	5.5511e-017	0	0	0
-0.69849	-0.30151	5.5511e-017	0	-6.245e-017	0
-0.027559	-0.54979	-0.33333	1.1055		0
-0.34816	-0.34816	0.80403	0.33333		-1.7321



Regelungsnormalform

Definition 3.8 *Regelungsnormalform*

Ein Eingrößensystem (Bild 3.10) hat regelungskanonische Normalform, wenn das Systemmodell diese Form hat:

Systemmatrix A_R in **Frobenius-Form**:
Die letzte Zeile enthält die **Koeffizienten**
des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) , \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \quad (3.59)$$

oder abgekürzt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_R u(t) ,$$

$$y(t) = \mathbf{c}_R^T \mathbf{x}(t)$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = \mathbf{c}_R^T [\mathbf{I} s - \mathbf{A}_R]^{-1} \mathbf{b}_R$$



Eigenschaften der Regelungsnormalform

- Die **Regelungsnormalform** lässt sich sofort angeben, wenn die **Übertragungsfunktion $G(s)$** eines dynamischen Systems bekannt ist.
- Die **Regelungsnormalform** existiert dann und nur dann, wenn das System **(A,b)** vollständig **steuerbar** ist.

Die Regelungsnormalform erhält man durch eine Zustandstransformation

$$\mathbf{x}_R(t) = \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{x}(t)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{q}'_S \\ \mathbf{q}'_S A \\ \mathbf{q}'_S A^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}'_S A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}'_S = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{Q}_S^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_R &= \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_R \\ \mathbf{b}_R &= \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_R^T &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}_R \\ \mathbf{x}_{R0} &= \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix



Definition 3.9 Beobachtungsnormalform

Ein Eingrößensystem (Bild 3.10) ist in *Beobachtungsnormalform*, wenn das Zustandsraummodell $(\mathbf{A}_B, \mathbf{b}_B, \mathbf{c}_B)$ die Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_B(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_B(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_B(t) \end{aligned} \quad (3.69)$$

mit

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_B &= \mathbf{A}_R^T \\ \mathbf{b}_B &= \mathbf{c}_R \\ \mathbf{c}_B^T &= \mathbf{b}_R^T \end{aligned}$$

Dualer Zusammenhang

hat.

□

