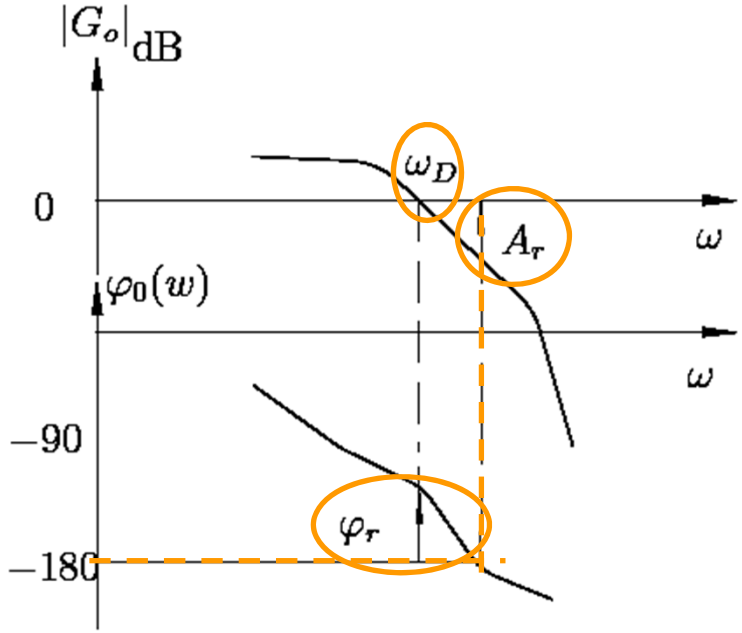
Nyquist-Verfahren

- **Motivation**
  - Ein mathematisches Modell der Strecke ist nicht notwendig
  - Aussagen über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises anhand des Frequenzgangs $G_0(j\omega)$
- **Grundidee** (experimentelle Stabilitätsanalyse)
- **Definition:** Kritischer Punkt
- **Vereinfachtes Nyquistkriterium**
- **Linke-Hand-Regel**
- **Vereinfachtes Nyquistkriterium im Bodediagramm**

Zusammenfassung der 3. Vorlesung

- **Definitionen der Stabilitätsreserve:**
  - **Amplitudenrand:** Abstand der Amplitudenkennlinie von der 0-dB Linie beim Winkel $\varphi_0 = -180°$.
  - **Phasenrand:** Abstand der Phasenkennlinie von der -180°-Geraden bei der Durchtrittsfrequenz ω_D.



Wurzelortskurvenverfahren

- **Das WOK-Verfahren wurde 1948 von Walter R. Evans entwickelt.**
- **Pole und Nullstellen des offenen Regelkreises sind bekannt: Wie ändert sich die Lage der Pole, wenn der Regelkreis geschlossen wird?**
- **Diese Frage kann mit Hilfe des WOK-Verfahrens beantwortet werden.**
- **Das WOK-Verfahren ist eines der Standardverfahren im Bereich der Flugregelung.**
- **Die Pole des geschlossenen Regelkreises sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung**

$$1 + G_0(s) = 1 + G_S(s)G_R(s) = 0$$

Definition 2.4 Wurzelort und Wurzelortskurve

Der Wurzelort ist der geometrische Ort der Lösungen (Wurzeln) der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0$$

des geschlossenen Regelkreises in der komplexen Ebene.

Die Wurzelortskurve (WOK) stellt die Abhängigkeit der Wurzelorte von einem Parameter (vielfach der Verstärkung K_0) des offenen Regelkreises dar.

$$1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)} = 0$$

Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$C(s) = N_0(s) + Z_0(s)$$

WOK-Vefahren: Beispiel

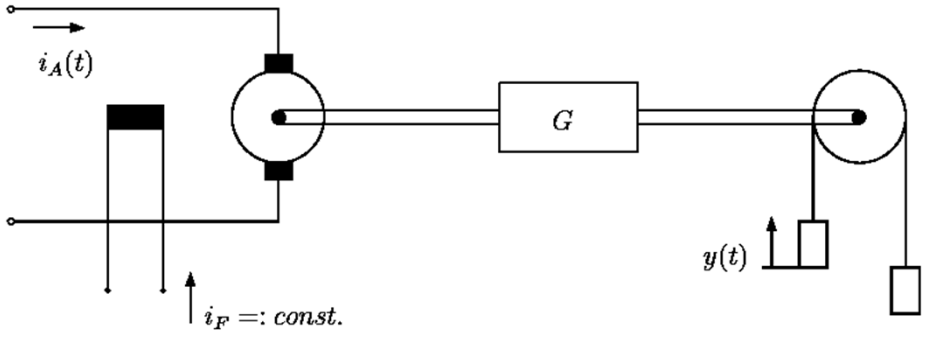


Bild 2.34: Geräteplan eines Förderantriebes

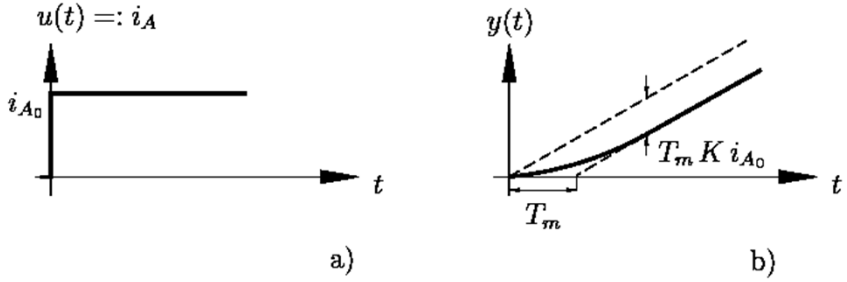


Bild 2.35: Übergangsverhalten des Förderantriebes in **Bild 2.34:**
a) Sprungförmige Erregung b) Sprungantwort

Dgl.: $\Theta\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) = u(t)$

Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/B}{s}\frac{1}{\left(1+\frac{\Theta}{B}s\right)}$$

K_S T

P-Regler: $G_R(s) = K_R$

Üfkt des offenen Kreises

$$G_0(s) = K_R \cdot \frac{K_S}{s}\frac{1}{1+sT} = K_0\frac{1}{s(1+sT)}$$

Verstärkung des PT$_1$-Anteils

WOK-Verfahren: Beispiel (2)

Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises:

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{Z_0(s)/N_0(s)}{1+\frac{Z_0(s)}{N_0(s)}} = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)\left(\frac{N_0(s)+Z_0(s)}{N_0(s)}\right)} = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)+Z_0(s)} = \frac{K_0}{s(1+sT)+K_0} = \frac{Z_w(s)}{N_w(s)}$$

Charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises:

$$C(s) = N_w(s) = Ts^2 + s + K_0 = 0$$

mit den Wurzeln:

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\frac{1}{4T^2} - \frac{K_0}{T}}$$

WOK-Verfahren: Beispiel (3)

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\frac{1}{4T^2} - \frac{K_0}{T}}$$

i) für $K_0 = 0 : s_1 = 0 \,;\, s_2 = -\frac{1}{T}$

ii) für $K_0 = 1/4T : s_{1/2} = -\frac{1}{2T}$

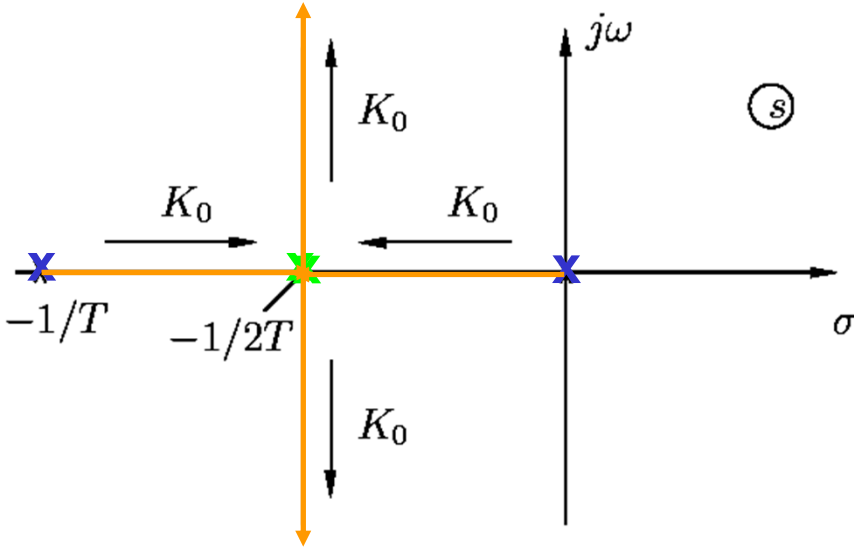
iii) für $K_0 > 1/4T :$

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2T} \pm j\frac{1}{2T}\sqrt{4K_0T - 1}$$

Wurzelort für $K_0 = 0$

Wurzelort für $K_0 = 1/4T$

Wurzelorte für $K_0 > 1/4T$



Wurzelorte für $0 \leq K_0 \leq \infty$ **bilden die Wurzelortskurve**

WOK-Verfahren: Beispiel (4)

Interpretation der WOK

- **Die WOK zeigt die Bewegungen der Pole des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von der Kreisverstärkung $K_0 = K_R \cdot K_s$.**
- **Aus der WOK kann man erkennen, wie sich die dynamischen Eigenschaften des geschlossenen Kreises bei Erhöhung der Reglerverstärkung verändert.**
  - **Der geschlossene Kreis ist für $K_0 > 0$ immer stabil.**
  - **Mit zunehmender Verstärkung $K_0 > 1/4T$ nimmt die Eigenfrequenz ω_0 zu und die Dämpfung D ab.**

WOK-Verfahren: Ableitung

Übertragungsfunktion des offenen Kreises in Pol-Nullstellen-Form:

$$G_0(s) = k_0 \hat{G}_0(s) = k_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - n_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

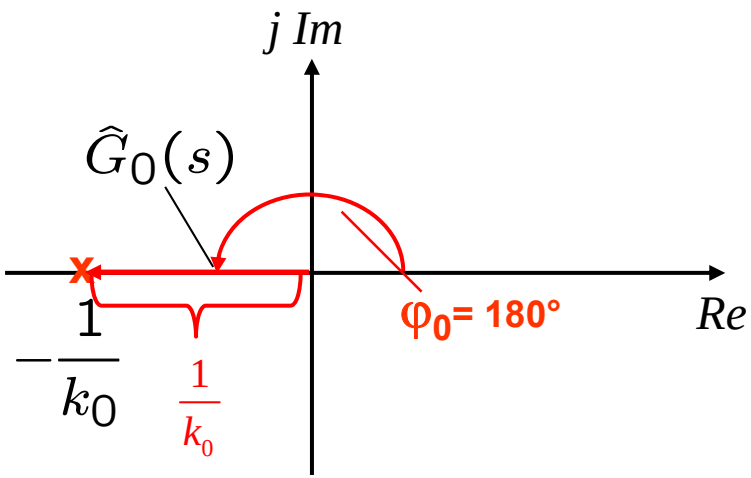
Alle s-Werte, die diese Gleichung erfüllen sind Pole des Regelkreises

Charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises:

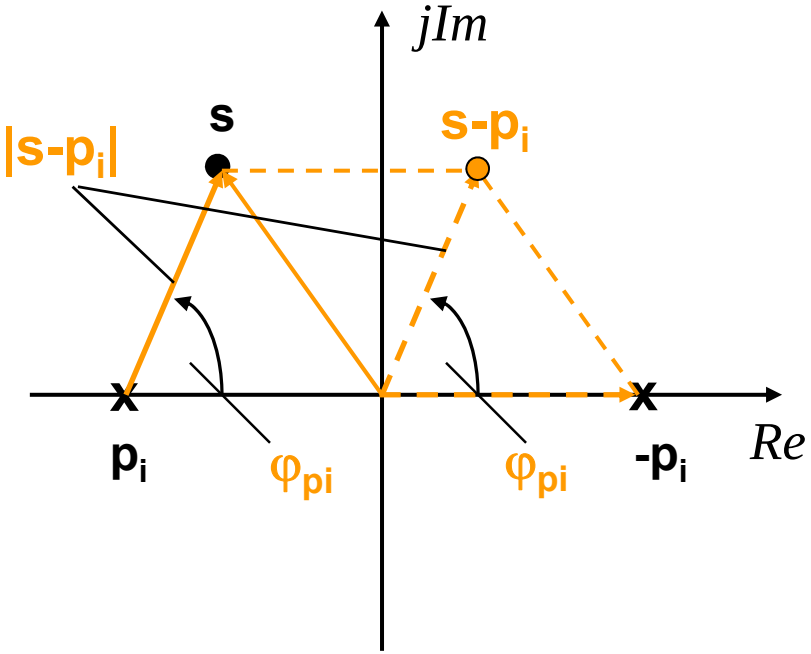
$$1 + k_0 \hat{G}_0(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{G}_0(s) = \frac{(s - n_1) \cdots (s - n_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = -\frac{1}{k_0}$$

in Exponentialform:

$$\underbrace{|\hat{G}_0(s)|}_{\frac{1}{k_0}} e^{j\underbrace{\varphi_0(s)}_{\pm\pi}} = -\frac{1}{k_0}$$



Betrachtung des Linearfaktors $(s-p_i)$



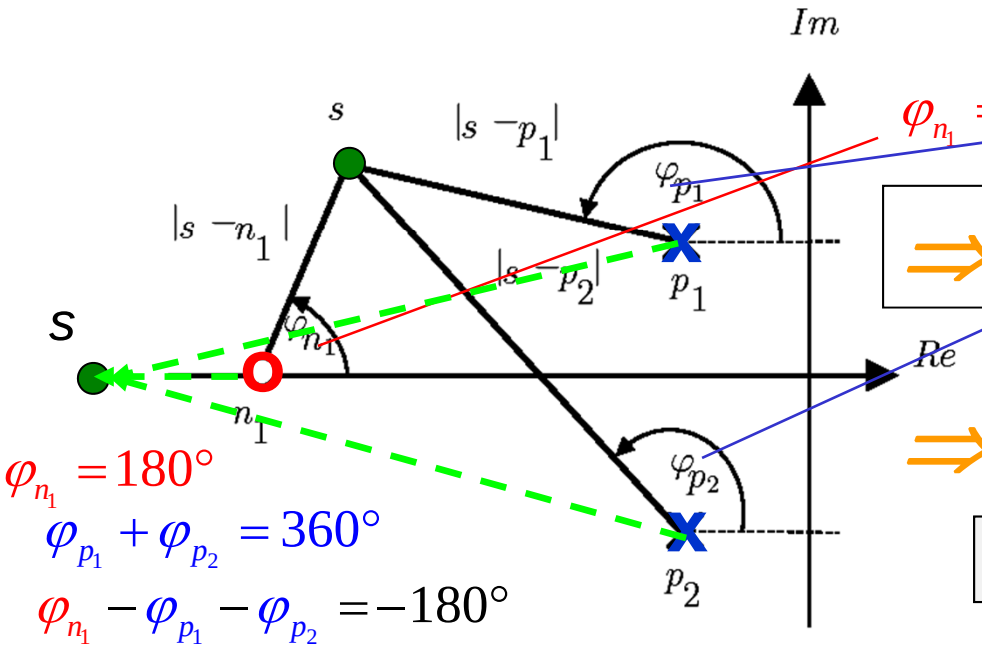
Länge und Orientierung des komplexen Zeigers $s-p_i$ erhält man einfach durch Zeichnen eines Zeigers von p_i nach s.

WOK-Verfahren: Ableitung (2)

Amplitudenbedingung: $$|\hat{G}_0(s)| = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s - n_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|} = \frac{1}{k_0}$$

Phasenbedingung ist nicht von k_0 abhängig !!!!

Phasenbedingung: $$\varphi_0(s) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{n_i} - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{p_i} = \pm(2k+1)\pi$$
$$= \pm 180°, \pm 540°, \ldots$$



$\varphi_{n_1} = 68°$ $\varphi_{p_1} = 175°$ $\varphi_{p_2} = 143°$

$\Rightarrow$ $\varphi_{n_1} - \varphi_{p_1} - \varphi_{p_2} = 68° - 175° - 143°$

$= -250° \neq -180°$

$\Rightarrow$

$\varphi_{n_1} = 180°$

$\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} = 360°$

$\varphi_{n_1} - \varphi_{p_1} - \varphi_{p_2} = -180°$

s ist kein Punkt auf der WOK !

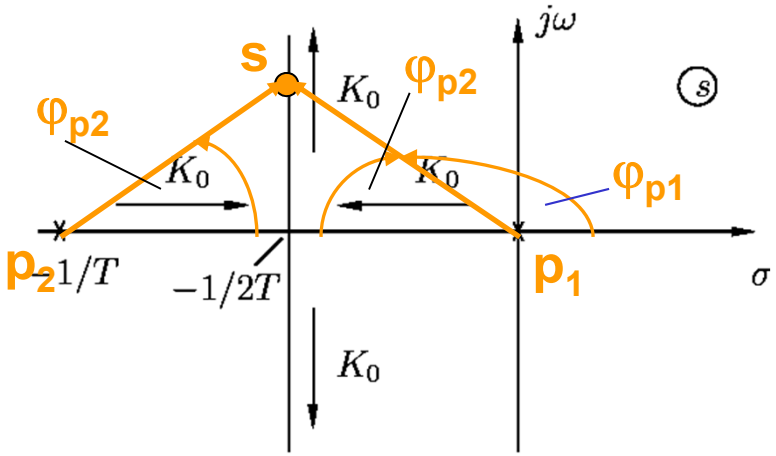
Die Winkelbedingung ist unabhängig von k_0:

Satz 2.5

Die Wurzelortskurve eines Systems ist der geometrische Ort aller Punkte der s–Ebene, für die die Summe der Pol– und Nullstellenwinkel der Übertragungsfunktion des offenen Systems $\pm 180°(2k+1)$ beträgt.

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_{n_i} - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{p_i} = \pm 180°(2k+1) \quad .$$

Alle Pole der Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises liegen auf den WOKn. □



$\varphi_{p1} + \varphi_{p2} = 180°$

$\Rightarrow$

Phasenbedingung ist erfüllt !!!

Systemverstärkung und WOK-Verstärkung

Systemverstärkung K für Systeme mit Ausgleich: $K = G(s)\big|_{s=0}$

Beispiel:

$$G(s) = \frac{K(1+T_3 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \Rightarrow G(0) = K$$

Allgemein gilt:

$$k_0 = K \frac{\prod_{l=1}^{n} -p_l}{\prod_{i=1}^{m} -n_i}$$

Pol-Nullstellendarstellung

$$G(s) = \frac{K \cdot T_3 \cdot (s + 1/T_3)}{T_1 \cdot T_2 \cdot (s + 1/T_1)(s + 1/T_2)}$$

$$= k_0 \frac{(s - n_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

mit $n_1 = -1/T_3$, $p_1 = -1/T_1$, $p_2 = -1/T_2$

und $k_0 = \dfrac{K \cdot T_3}{T_1 T_2}$

Konstruktionsregeln der WOK

$$
\left.
\begin{aligned}
G_0(s) &= k_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - n_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} \qquad \text{mit} \quad k_0 \geq 0 \\
m &= \text{Anzahl der im Endlichen liegenden Nullstellen} \\
n &= \text{Anzahl der im Endlichen liegenden Pole.}
\end{aligned}
\right\}
$$

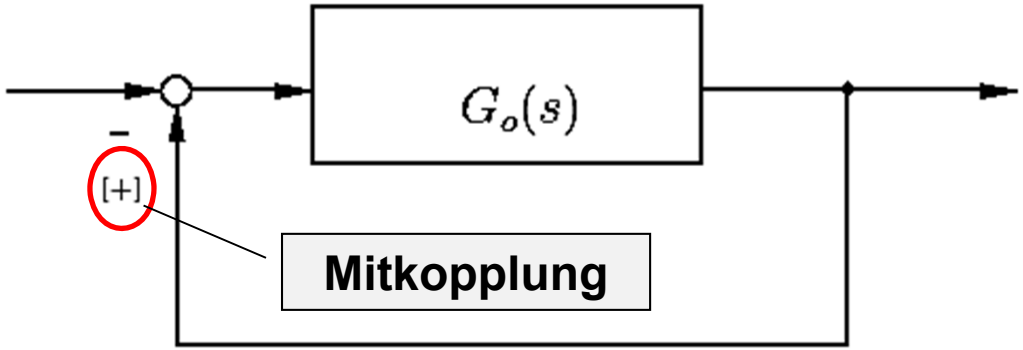


Bild 2.40: Regelkreis mit Einheitsrückführung

Start- und Endpunkte der WOK

Die n Äste der WOK beginnen für $k_0 = 0$ in den Polen p_i des offenen Systems $G_0(s)$. m Äste enden für $k_0 \to \infty$ in den endlichen Nullstellen n_i von $G_0(s)$, während die verbleibenden $(n-m)$ Äste gegen Unendlich laufen (man kann auch sagen, daß diese Äste in der Nullstelle im Unendlichen der Vielfachheit oder Ordnung $(n-m)$ enden). □

Winkel der Asymptoten

Die *Asymptoten* der $(n-m)$ nach Unendlich strebenden Äste der WOK sind Geraden, die sich für $(n-m) \geq 2$ alle im *Wurzelschwerpunkt*

$$\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m}$$

auf der reellen Achse schneiden. Sie haben zur reellen Achse die Neigungswinkel

$$\varphi_k = \frac{(2k-1)180^\circ}{n-m}, \quad k = 1, 2, ..., n-m \ .$$

WOK-Verfahren: Regeln (2)

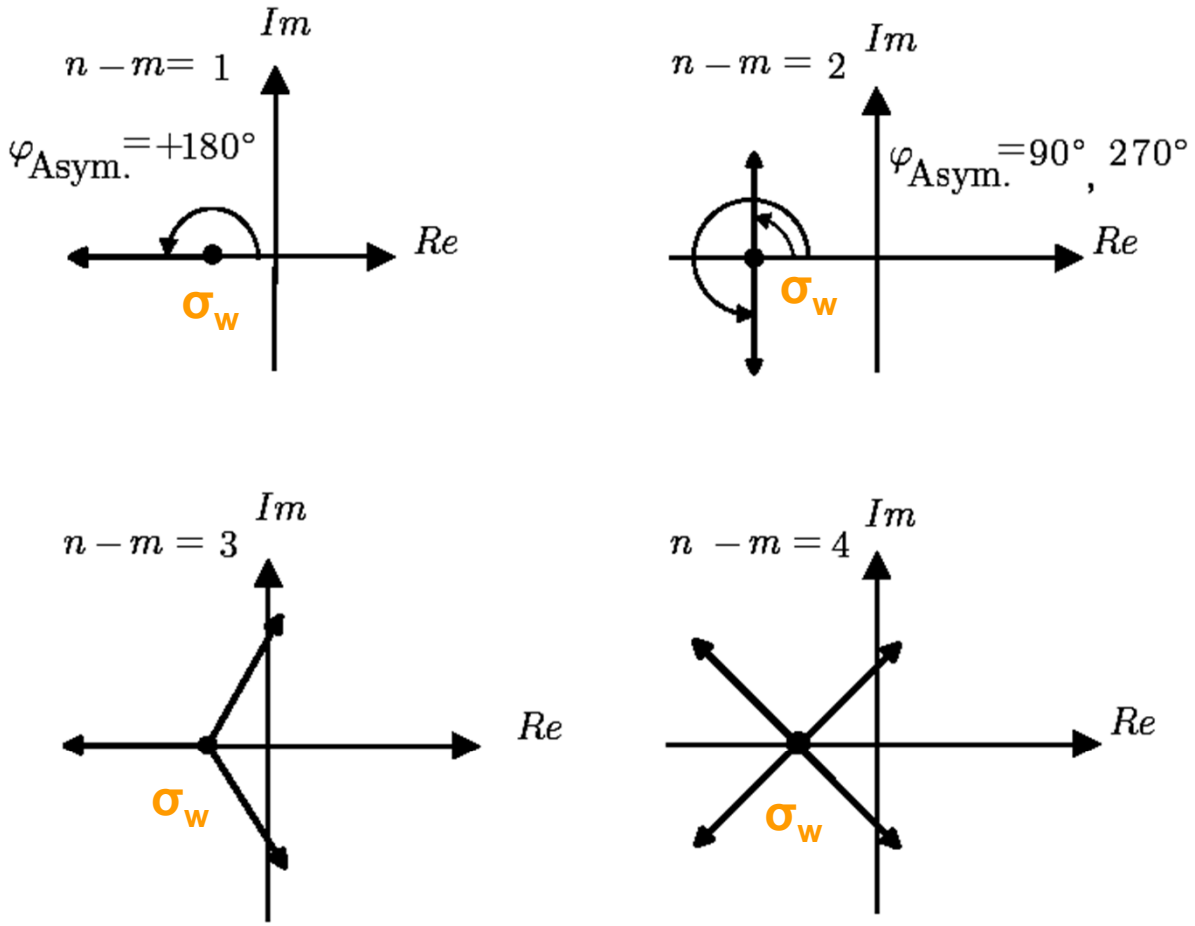
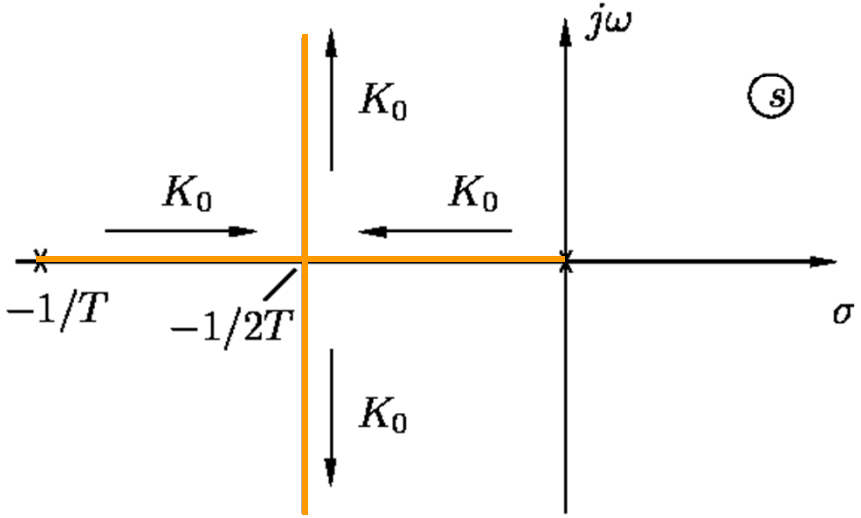


Bild 2.39: Asymptoten der WOK für unterschiedliche Differenzgrade $(n-m)$ von $G_0(s)$

WOK-Verfahren: Regeln (3)

Wurzelorte auf der reellen Achse

Zur WOK gehören genau diejenigen reellen Werte s, für die die Anzahl der von diesem Punkt s aus gesehen rechts liegenden Pole und Nullstellen des offenen Kreises ungerade ist. □



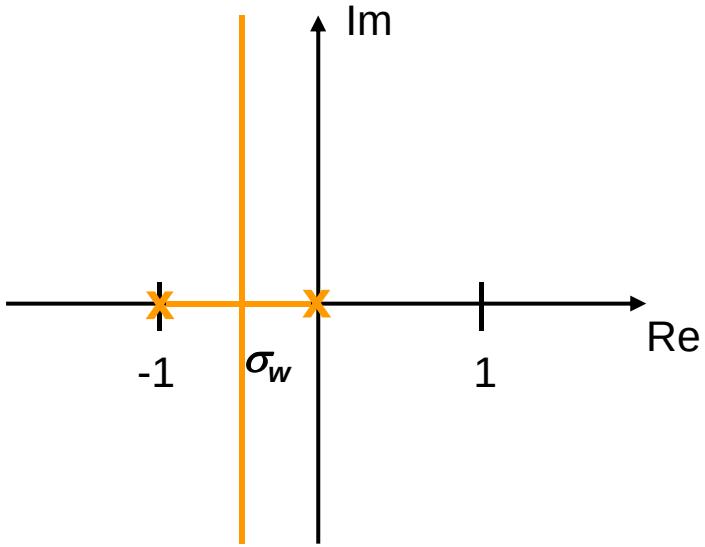
Symmetrie der WOK

Die WOKn verlaufen symmetrisch zur reellen Achse. □

WOK mit Hilfe der Regeln

Gegeben:

$$G_0(s) = k_0 \frac{1}{s(s+1)}$$



Gesucht: WOK

Anzahl n **der Pole:** 2
Anzahl m **der Nullstellen:** 0

Bestimmen und einzeichnen der Pole: $p_1 = 0$; $p_2 = -1$

Regel 3: WOK auf der reellen Achse

Regel 5 und 7: Anzahl n-m = 2 und Winkel der Asymptoten (90°, 270°)

Regel 8: Schnittpunkt der Asymptoten $\sigma_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m} = \frac{0+(-1)}{2} = -\frac{1}{2}$

Konstruktionsregeln der WOK (2)

1	Anfangspunkte	Die WOK beginnt für $k_0 = 0$ in den Polen von G_0.
2	Endpunkte	Die WOK endet für $k_0 \to \infty$ in den Nullstellen von G_0.
3	WOK auf der reellen Achse	Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von Polen und Nullstellen ungerade [gerade][2] ist, ist ein Wurzelort.
4	Anzahl der separaten Äste	Die WOK besteht aus n Ästen.
5	Anzahl der Äste im Unendlichen	$n - m$ Äste enden im Unendlichen, d. h. es existieren auch $n - m$ Asymptoten.
6	Symmetrie der WOK	Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse.

[2] Die Angaben in eckigen Klammern gelten für positive Rückführung.

Konstruktionsregeln der WOK (3)

7	Winkel der Asymptoten	Der Winkel der Asymptoten zur reellen Achse folgt aus $$\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \quad \left[\varphi_k = \frac{2k\pi}{n-m}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n-m.$$
8	Schnittpunkt der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt σ_W)	Der Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse. $$\sigma_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m} \quad \text{für} \quad n-m \geq 2$$
9	Austritts– und Eintrittswinkel	Der Austrittswinkel Θ der WOK aus einem Pol (oder Eintrittswinkel in eine Nullstelle) ergibt sich, indem man einen Punkt s_1, der auf der WOK liegen soll, in unmittelbarer Nähe des Poles (bzw. der Nullstelle) annimmt und dann die Winkelbedingung ansetzt: $$\sum_{i=1}^{m} \arg(s_1 - n_i) - \sum_{i=1}^{n} \arg(s_1 - p_i) = \pm(2k-1)\pi \quad [\pm 2k\pi]$$

Konstruktionsregeln der WOK (4)

10	Verzweigungspunkte der WOK auf der reellen Achse	Allgemein gilt am Verzweigungspunkt a: $\frac{\mathrm{d}G_0(s)}{\mathrm{d}s}\Big\|_{s=a} = 0$ Für $a \neq p_i$ und $a \neq n_i$ gilt damit: a) reelle Pole und Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a-n_i}$ b) konjugiert komplexe Pole und Nullstellen $n_i = \alpha_i \pm j \cdot \beta_i$; $p_i = \alpha_l \pm j \cdot \beta_l$ $\sum_{i=1}^{m/2} \frac{2(a-\alpha_i)}{(a-\alpha_i)^2} = \sum_{l=1}^{n/2} \frac{2(a-\alpha_l)}{(a-\alpha_l)^2+\beta_l^2}$
11	Schnittpunkt mit der imaginären Achse	Stabilitätsgrenze des geschlossenen Kreises: $k_{0_{krit}}$ und ω_{krit}, z. B. mit Hurwitz–Kriterium
12	k_0–Parametrierung der WOK	Die Verstärkung für einen Punkt s_1 der WOK ergibt sich aus: $k_0 = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lvert s_1 - p_i \rvert}{\prod_{i=1}^{m} \lvert s_1 - n_i \rvert}$ (Falls keine Nullstellen auftreten, ist der Nenner gleich 1 zu setzen.)
13	Potential–Analogie	Die WOK verläuft beim Austritt aus der reellen Achse konkav zu benachbarten Nullstellen von $G_0(s)$, bzw. konvex zu benachbarten Polen.

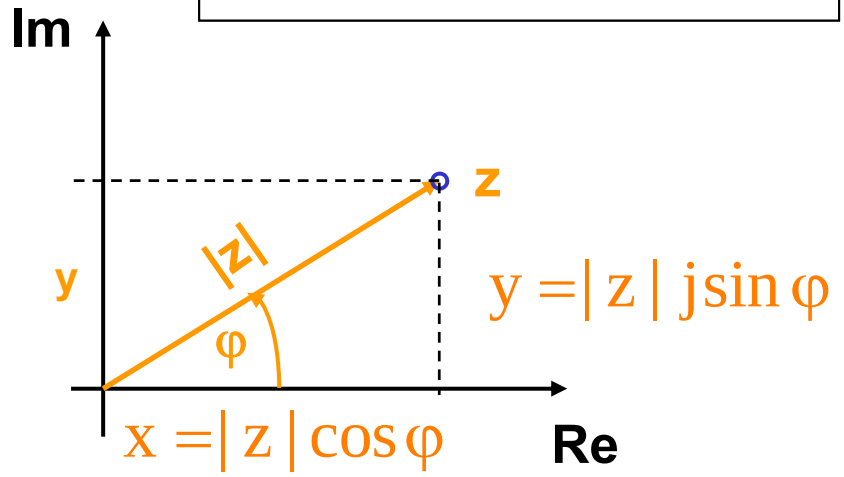
Komplexe Zahlen (1)

Kartesische Koordinaten

$$z = x + jy$$

Darstellung als Zeiger (Vektor) in der komplexen Zahlenebene (Gaußschen Zahlenebene).

Gaußsche Zahlenebene



Polarkoordinaten

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Exponentialform

Aus der Eulersche Identität

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$

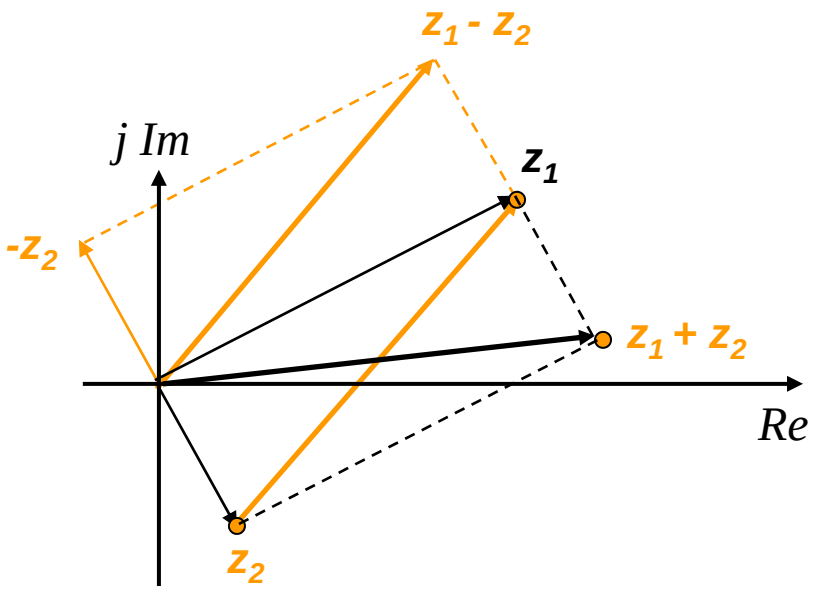
folgt $z = |z|e^{j\varphi} = |z|e^{j\measuredangle z}$

Komplexe Zahlen (2)

Addition und Subtraktion

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

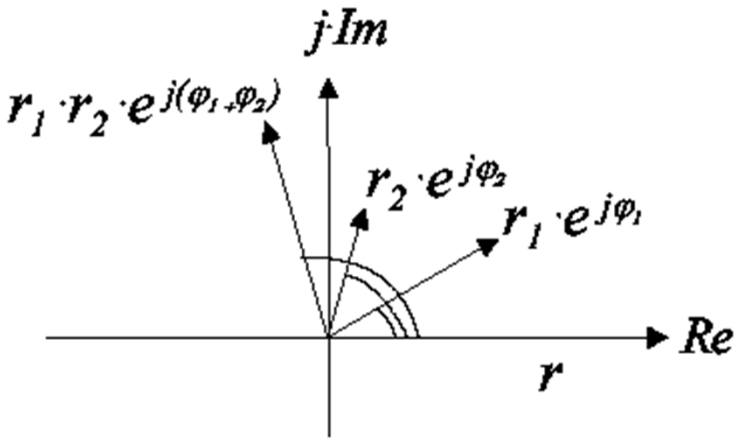


Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2)$$

$$= r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2}$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



PT_2-System (komplexe Pole)

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = K\,u(t)$$

Übertragungsfunktion:

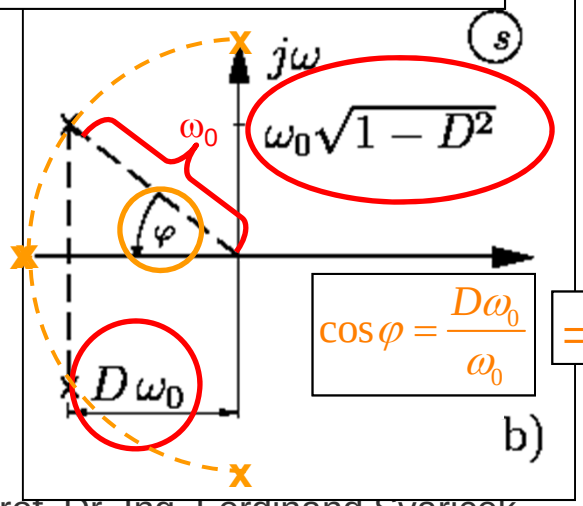
$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0}s + 1}$$

Pole: Aus $s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ folgt

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{(D\omega_0)^2 - \omega_0^2}$$

$$= -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$

$$|s_{1,2}| = \sqrt{(D\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - D^2)} = \omega_0$$



$$\cos\varphi = \frac{D\omega_0}{\omega_0} = D$$

Für $D < 1$ ergibt sich:

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - D^2}$$

Für $D = 1$ ergibt sich: $s_1 = s_2 = -\omega_0$

und für $D = 0$: $s_{1,2} = \pm j\omega_0$