

## ➤ Ortskurve und Bodediagramm des **I-Systems**.

- Pol im Ursprung der s-Ebene.
- Amplitudengang ist eine Gerade mit einer Neigung von **20dB/Dekade**, die die 0-dB-Linie bei  $\omega=K_I=1/T_I$  schneidet.
- Konstante Phasenverschiebung von **-90°**.

## ➤ Ortskurve und Bodediagramm des **IT<sub>1</sub>-Systems**.

- **Reihenschaltung** eines I- und eines PT<sub>1</sub>-Systems.
- Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei  $\omega_E = 1/T_1$ .
- Phasenverschiebung von **-90° ⇒ -180°**.



## ➤ Ortskurve und Bodediagramm des **D-Systems**.

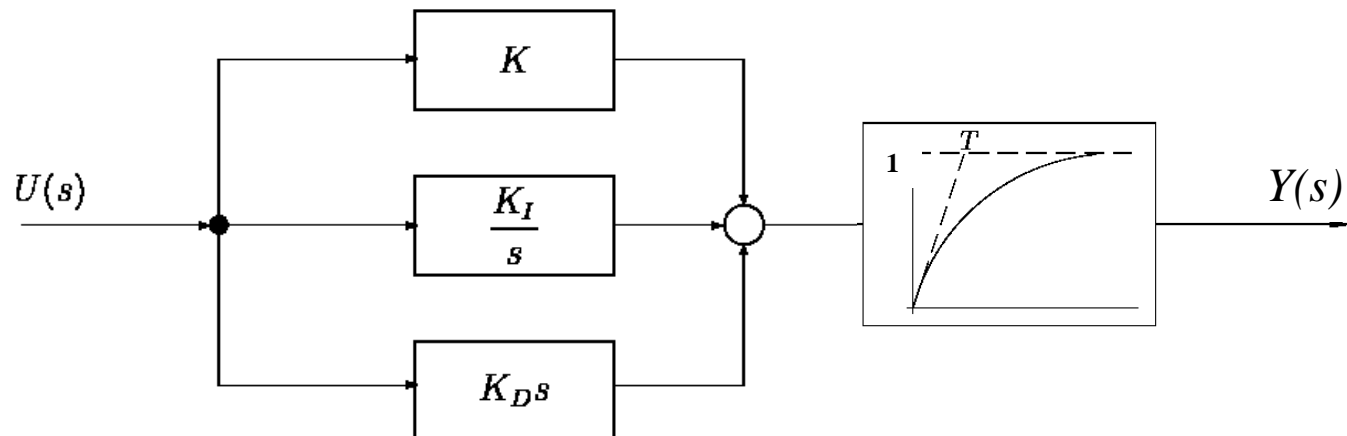
- **Nullstelle** im Ursprung der s-Ebene.
- Amplitudengang ist eine Gerade mit einer Steigung von **20dB/Dekade**, die die 0-dB-Linie bei  $\omega=1/T_D$  schneidet.
- Konstante Phasenverschiebung von **+90°**.

## ➤ Ortskurve und Bodediagramm des **DT<sub>1</sub>-Systems**.

- **Reihenschaltung** eines D- und eines PT<sub>1</sub>-Systems.
- Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei  $\omega_E = 1/T_1$ .
- Phasenverschiebung von **+90° ⇒ 0°**.



- **PD-, PI- und PID-Systeme.**
  - Parallelschaltung von P-, I- und D-Gliedern.
- **PID-System mit Verzögerung 1. Ordnung (PIDT<sub>1</sub>).**
  - Reihenschaltung von PID- und PT<sub>1</sub>-System.



## ➤ Phasenminimumsysteme

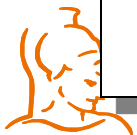
- Systeme **ohne** Totzeit, deren rationale Übertragungsfunktionen  $G(s)$  nur Pole **und** Nullstellen in der **linken**  $s$ -Halbebene haben.
- Systeme, die bei gegebenem Amplitudengang eine **minimale Phasenverschiebung** aufweisen.

## ➤ Nichtphasenminimumsysteme

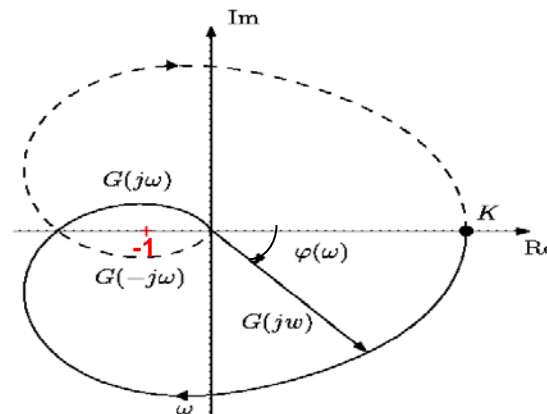
- Die Sprungantwort von Systemen mit einer Nullstelle in der **rechten**  $s$ -Halbebene zeigt zunächst eine Reaktion in die falsche Richtung.

## ➤ Allpaßsysteme

- Konstanter Amplitudengang von **1** für alle Frequenzen.
- Systeme, deren Nullstellen **spiegelbildlich** zu den Polen in der rechten  $s$ -Halbebene liegen.



- Das Nyquist-Verfahren setzt kein mathematisches Modell der Regelstrecke voraus.
- Das Nyquist-Verfahren erlaubt Aussagen über die **Anzahl** der instabilen Pole des **geschlossenen** Kreises anhand des **Frequenzganges  $G_0(j\omega)$**  des **offenen** Kreises.



Eine Frequenzgangfunktion kann gewonnen werden

- a) experimentell durch Messungen an einem System und insbesondere Auswertung mittels Bode-Diagramm (Bestimmung der Eckfrequenzen aus den Schnittpunkten der Asymptoten).
- b) analytisch, z. B. aus Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i \cdot s^i}{\sum_{l=0}^n a_l \cdot s^l} \cdot e^{-sT_t} ,$$

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i \cdot (j\omega)^i}{\sum_{l=0}^n a_l \cdot (j\omega)^l} \cdot e^{-j\omega T_t} .$$



## Vorteile:

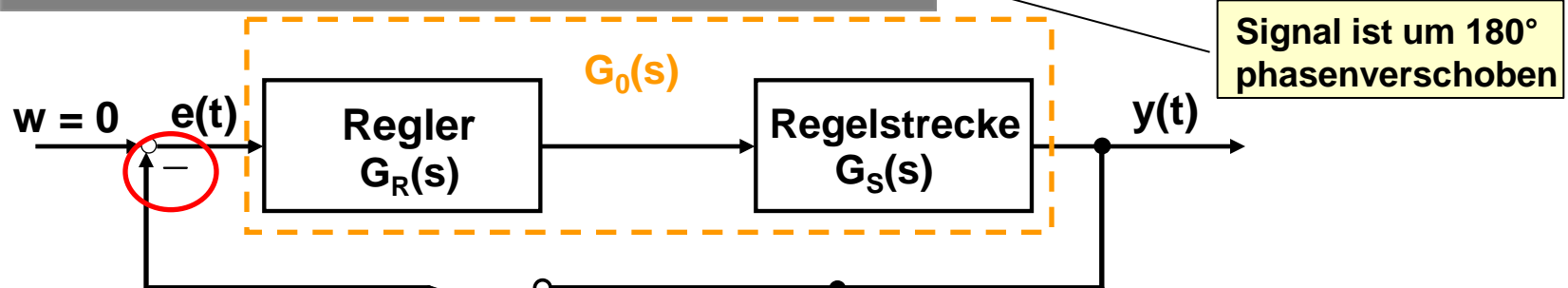
- Die Ortskurve lässt sich aus einer Reihenschaltung der einzelnen Regelkreisglieder ermitteln, wenn deren Kennwerte bekannt sind.
- Experimentell durch **Messungen** ermittelte Frequenzgänge der Regelkreisglieder können direkt berücksichtigt werden.
- Das Verfahren ermöglicht nicht nur die Untersuchung von Systemen mit **konzentrierten** Parametern, sondern auch von solchen mit **verteilten** Parametern (z.B. Totzeit-Systeme (vgl. SRT – Skript, Abschnitt 2.5.3)).
- Mit Hilfe der Frequenzkennlinien-Darstellung von  $G_0(j\omega)$  lässt sich nicht nur die **Stabilitätsanalyse (Amplituden- und Phasenrand)**, sondern auch der **Entwurf** (Synthese) stabiler Regelsysteme durchführen.



## Experimentelle Stabilitätsuntersuchung

$$e(t) = -\hat{y}' \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{y}' \cdot \sin(-\omega \cdot t) = \hat{y}' \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi)$$

Bronstein 2003, S. 56 + 57



$$y'(t) = \hat{y}' \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

→

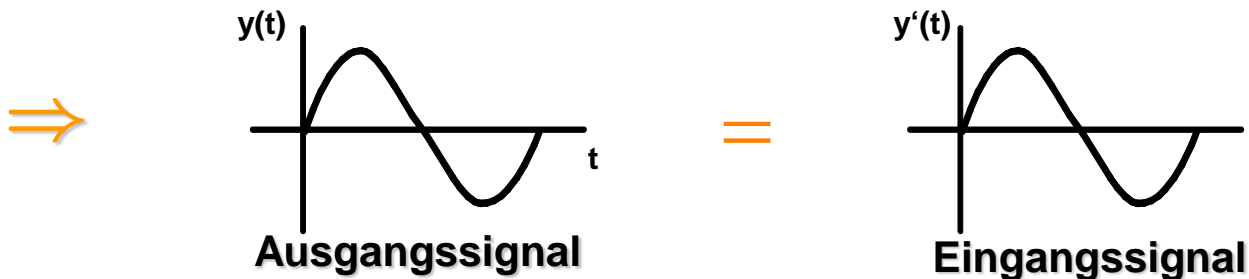
$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi - \pi)$$

Phasenverschiebung durch Regler und Strecke

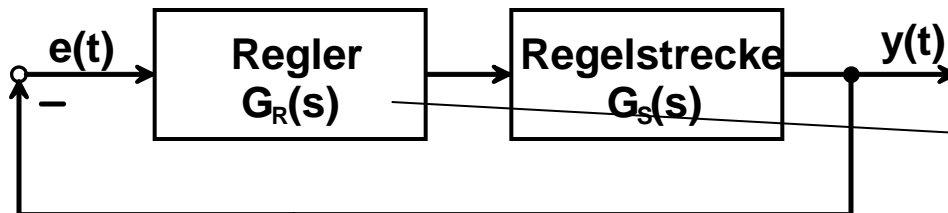




Frequenz so einstellen, dass die Phasenverschiebung  $\varphi = -180^\circ$  wird.  
 Dann die Kreisverstärkung auf  $K_0 = 1$  einstellen:  $\Rightarrow \hat{y} = \hat{y}'$



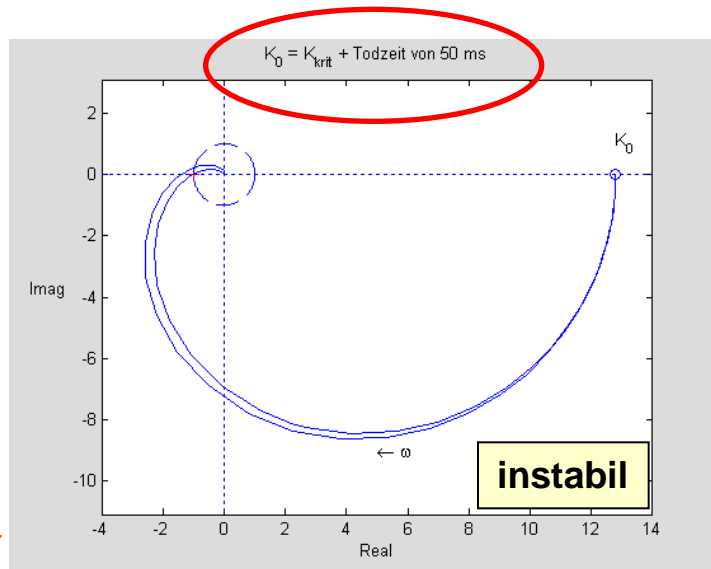
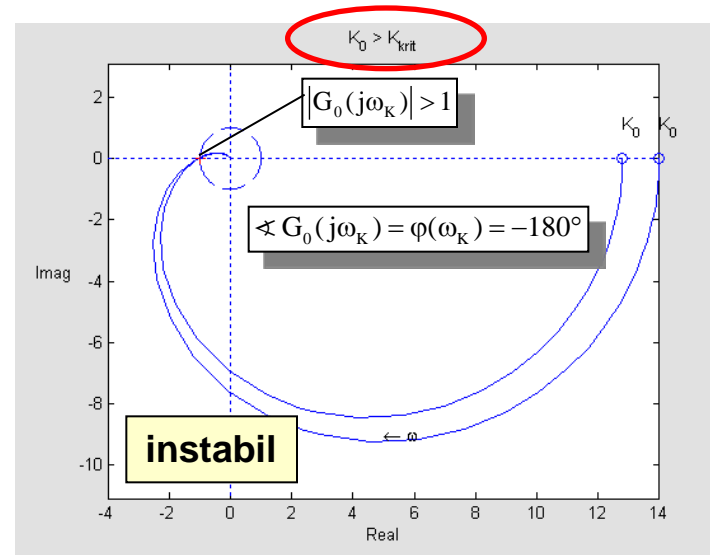
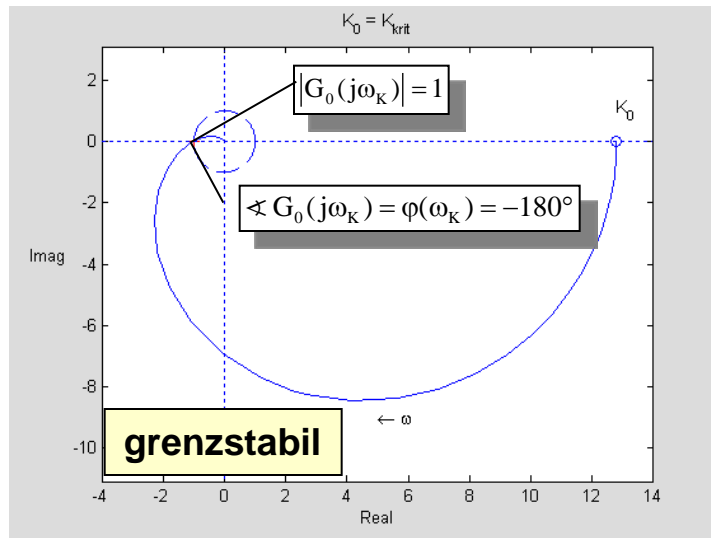
Der Signalgenerator kann entfallen und der Regelkreis kann geschlossen werden.



**Frage:** Was passiert, wenn  $K_R$  erhöht wird?

**Im Regelkreis liegt eine selbsterhaltende Schwingung vor.**





**Totzeitglied erzeugt eine zusätzliche Phasenverschiebung von**

$$\varphi(\omega) = -\omega T_t \text{ [rad]}$$



$$\varphi(\omega_K)_{T_t} \approx -14^\circ$$



$$|G_0(j\omega)| > 1$$

**bei**

$$\sphericalangle G_0(j\omega) = -180^\circ$$

## Forderung zur Wahrung der asymptotischen Stabilität:

Der offene Regelkreis darf gleichzeitig zwischen Eingangssignal des Reglers und Ausgangssignal der Strecke keine Phasenverschiebung  $\varphi = -180^\circ$  und eine Kreisverstärkung  $K_0(\varphi) \geq 1$  aufweisen!

**Amplitudenbedingung:**

$$|G_0(j\omega)| < 1$$



**Phasenbedingung:**

$$\nexists G_0(j\omega) = \varphi(\omega) = -180^\circ$$

**Diese Forderung kann leicht anhand der Nyquist-Ortskurve überprüft werden.**



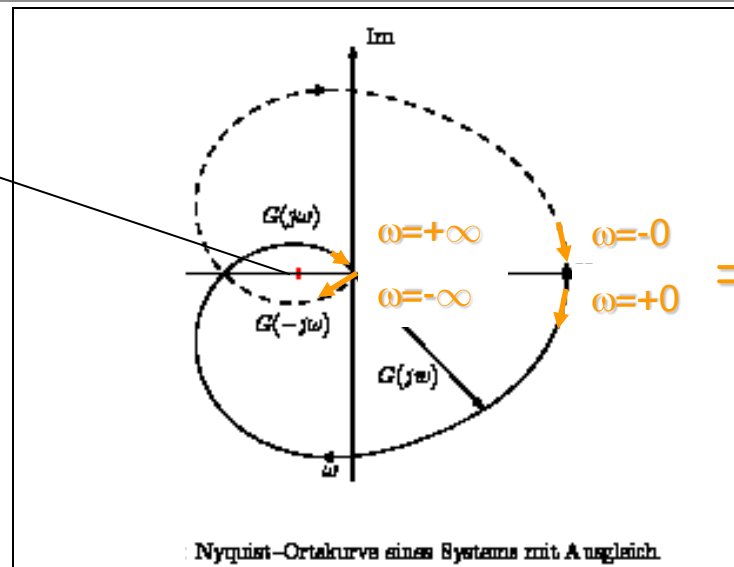
## Definition: Kritischer Punkt $P_{krit}$

Der Punkt  $P_{krit} = (-1, j \cdot 0)$  im Nyquist-Diagramm wird als **kritischer Punkt** bezeichnet.

### Satz 2.3 : Vereinfachtes Nyquistkriterium

Für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises ist bei **stabilem  $G_0(s)$**  notwendig und hinreichend, daß die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  bei Änderung der Frequenz  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  den kritischen Punkt  $(-1; j0)$  weder umschließt noch durchdringt.  $\square$

kritischer Punkt  $(-1, j0)$



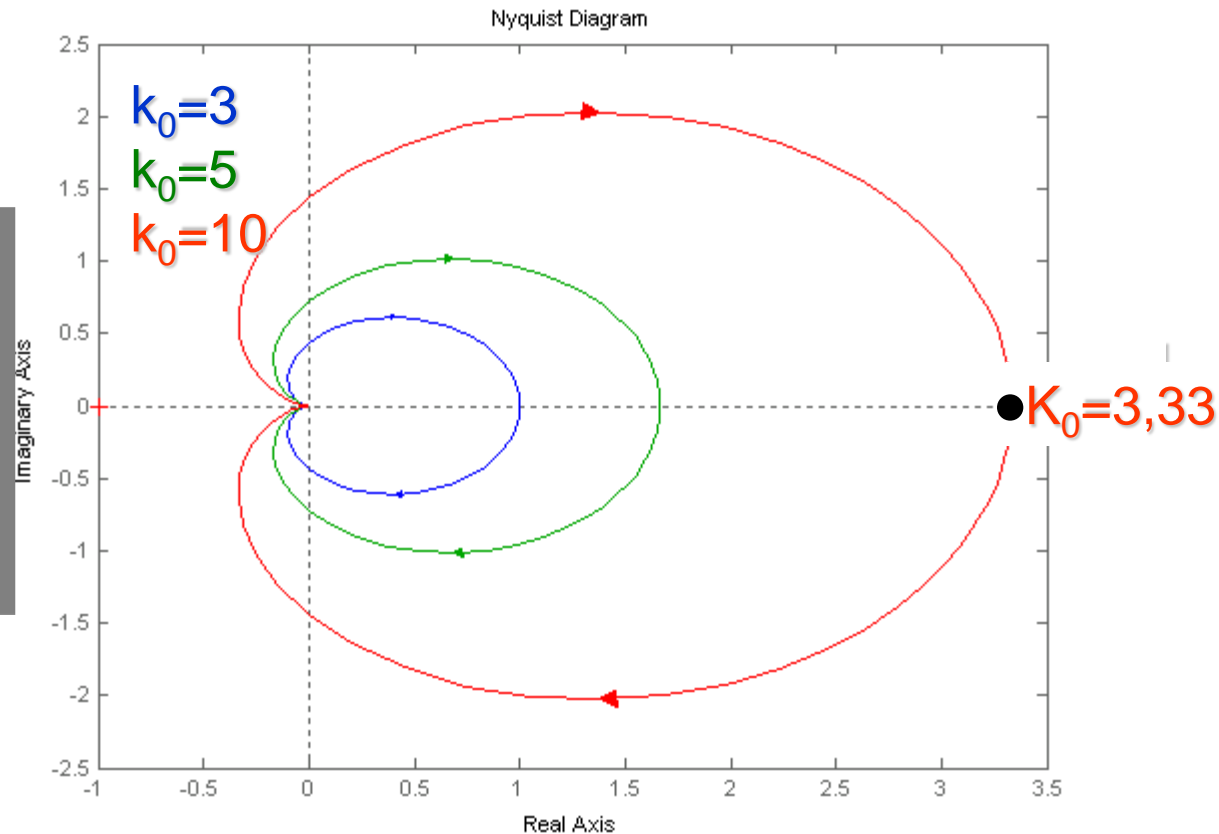
Regelkreis ist instabil



$$G_0(s) = \frac{k_0}{(s+1)(s+3)}$$

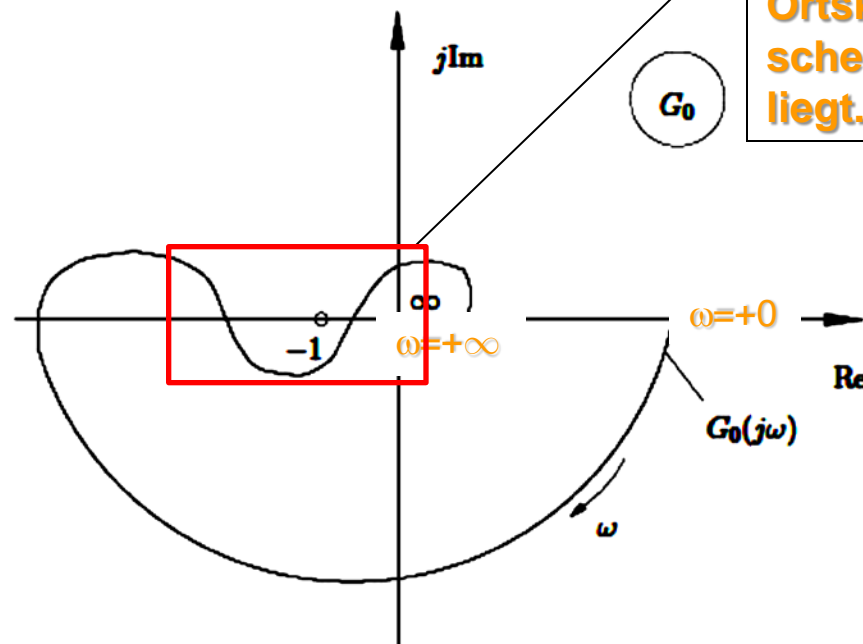
Der Punkt  $(-1, 0j)$  wird für beliebige Verstärkung  $k_0 > 0$  **nicht** umschlungen.

Das gilt allgemein für  $PT_2$ -Systeme.



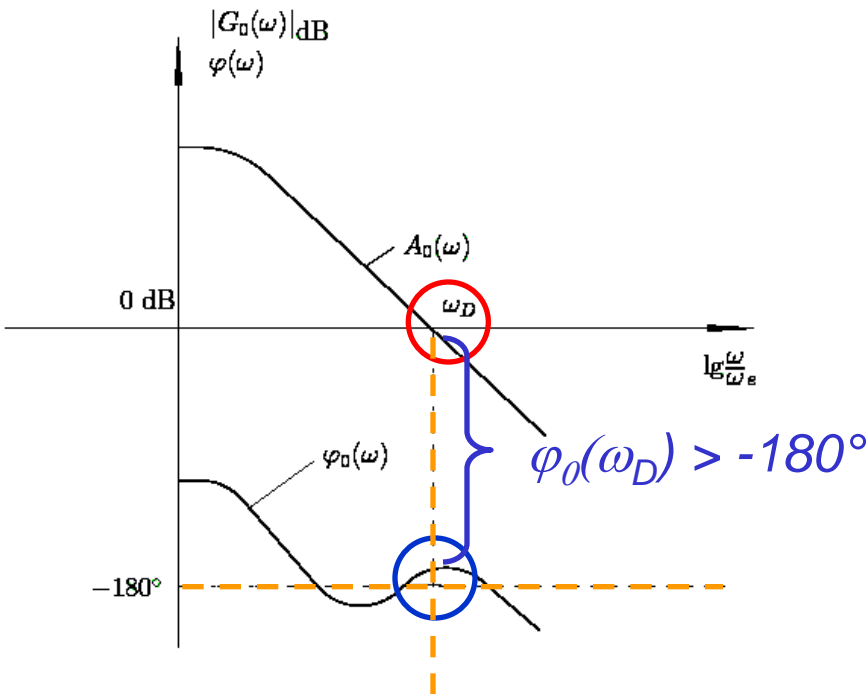
**Linke-Hand-Regel.** Wenn die Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  des offenen Regelkreises nur Pole in der linken  $s$ -Halbebene hat, ausgenommen einem 1- oder 2-fachen Pol bei  $s = 0$ , ist der geschlossene Kreis genau dann asymptotisch stabil, wenn bei Änderung der Frequenz  $\omega$  von  $+0$  bis  $+\infty$  der kritische Punkt  $(-1; j0)$  immer *links* von der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  liegt (Bild 2.33).

**Maßgebend ist der Teil der Ortskurve, der dem kritischen Punkt am nächsten liegt.**

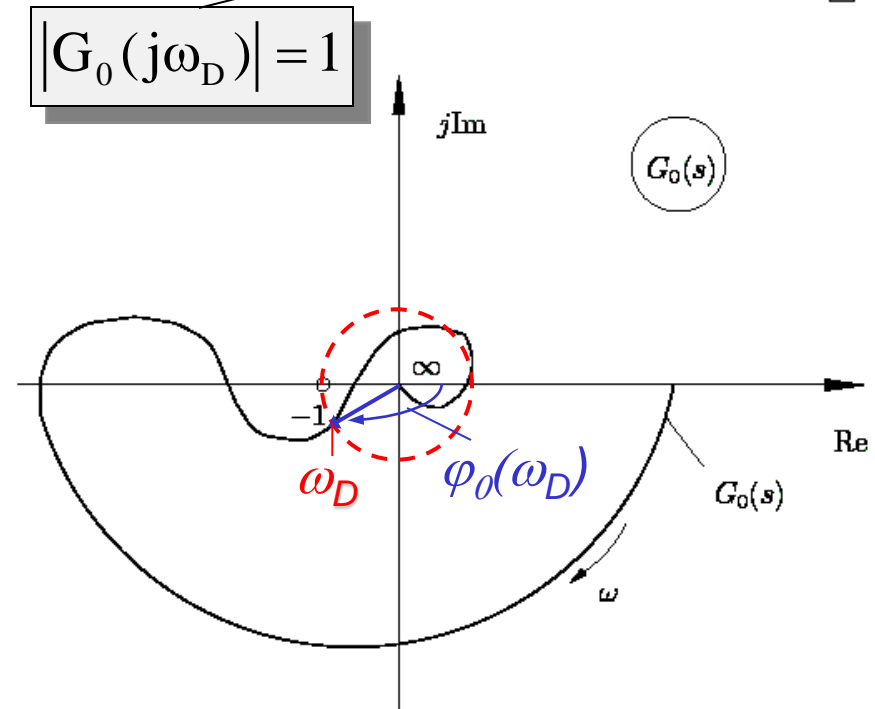


## Satz 2.4 : Vereinfachtes Nyquistkriterium im Bode-Diagramm

Wenn die Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  des offenen Regelkreises nur Pole in der linken  $s$ -Halbebene hat, ausgenommen einem 1- oder 2-fachen Pol bei  $s = 0$ , ist der geschlossene Kreis genau dann asymptotisch stabil, wenn  $G_0(j\omega)$  für die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  einen Phasenwinkel  $\varphi_0(\omega_D) > -180^\circ$  hat □



: Vereinfachtes Nyquistkriterium im Bode-Diagramm



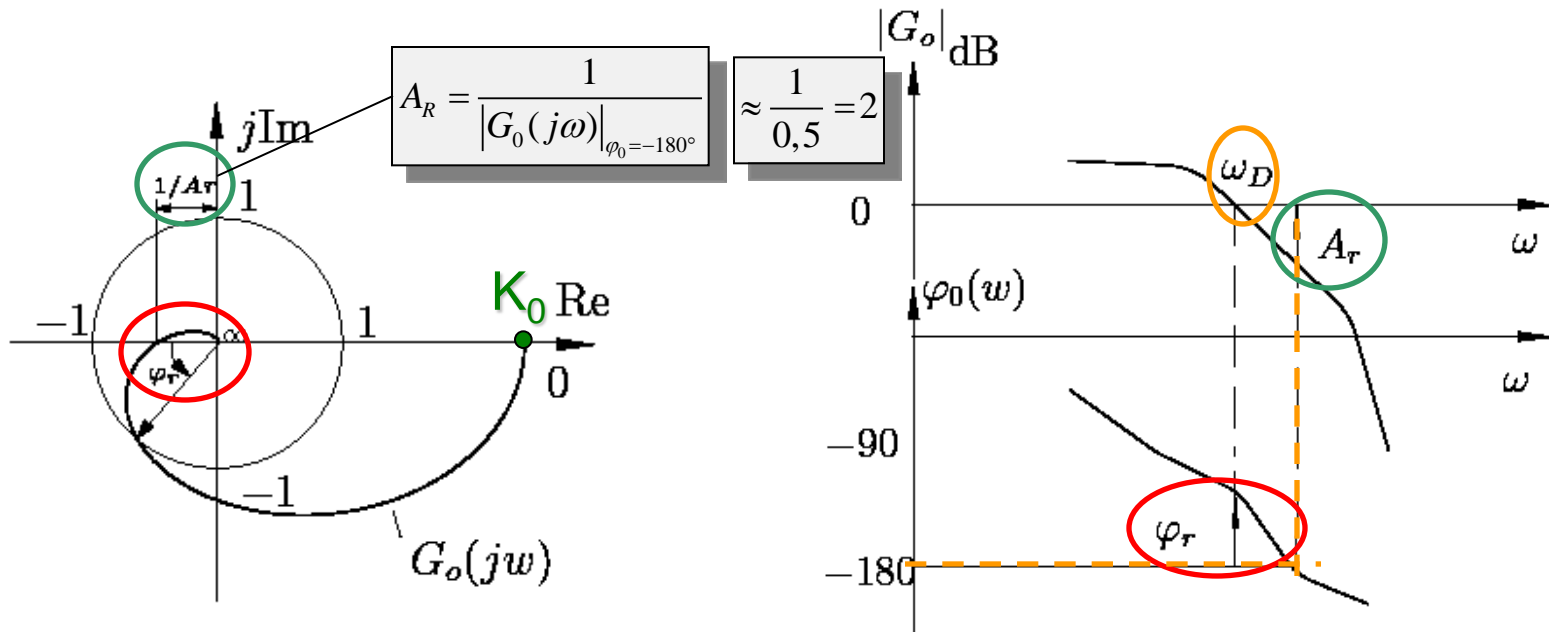
Beispiel zum vereinfachten Nyquistkriterium



- Eine Stabilitätsreserve ist notwendig, um **Modellunsicherheiten** und **Parameteränderungen** zu berücksichtigen.
- Die Nyquist-Ortskurve zeigt an, wie weit die Ortskurve vom kritischen Punkt (**Stabilitätsrand**) entfernt ist.
- Ein Maß für die Stabilitätsreserve (**robuste Stabilität**) ist der **Amplituden-** bzw. der **Phasenrand**.
- Der **Amplitudenrand** gibt an, wieweit die Verstärkung des **offenen** Kreises erhöht werden kann, bevor der **geschlossene** Kreis **instabil** wird.
- Der **Phasenrand** gibt an, wie groß eine zusätzliche **Phasenverschiebung** im **offenen** Kreis sein darf, bevor der **geschlossene** Kreis **instabil** wird.







**Amplituden-** und **Phasenrand** in der Ortskurvendarstellung

**Amplituden-** und **Phasenrand** im Bode-Diagramm

**Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ :** Frequenz, bei der die Amplitudenkennlinie die 0-dB-Linie schneidet.



## Definition 2.3 : Amplituden- und Phasenrand

### 1. Der Phasenrand

$$\varphi_R = 180^\circ + \varphi(\omega_D)$$

ist der Abstand der Phasenkennlinie von der  $-180^\circ$ -Geraden bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ , d. h. beim Durchgang der Amplitudenkennlinie durch die 0-dB-Linie ( $|G_0| = 1$ ).

### 2. Als Amplitudenrand

$$20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} |G_0|$$

$$A_R = \frac{1}{|G_0|} \Big|_{\varphi_0 = -180^\circ} ; A_{R_{dB}} = -|G_0|_{dB} \Big|_{\varphi_0 = -180^\circ}$$

wird der Abstand der Amplitudenkennlinie von der 0-dB-Linie beim Winkel  $\varphi_0 = -180^\circ$  bezeichnet. □

Für eine gut gedämpfte Regelung sollten etwa folgende Werte eingehalten werden:

$$A_{R_{dB}} = \begin{cases} 12 \text{ dB} & \text{bis} & 20 \text{ dB} & \text{bei Führungsverhalten} \\ 3,5 \text{ dB} & \text{bis} & 9,5 \text{ dB} & \text{bei Störverhalten} \end{cases}$$

**4**

**10**

**1,5**

**3**

$$\varphi_R = \begin{cases} 40^\circ & \text{bis} & 60^\circ & \text{bei Führungsverhalten} \\ 20^\circ & \text{bis} & 50^\circ & \text{bei Störverhalten} \end{cases}$$



```
% Vorlesung RT
% Beispiel: Stabilitätsanalyse eines Systems 3-ter Ordnung
```

```
%
%
s=tf('s') % Definition der Üfkt. G(s) = s (Laplace-Variabl
```

```
% Definition der Übertragungsfunktion des offenen Kr
```

```
k_0 = 1
```

```
G_0 = k_0/((s+1)*(s+3)*(s+5))
```

```
% Darstellung der Nyquist-Ortskurve in Bild 1
```

```
figure(1)
nyquist(G_0)
```

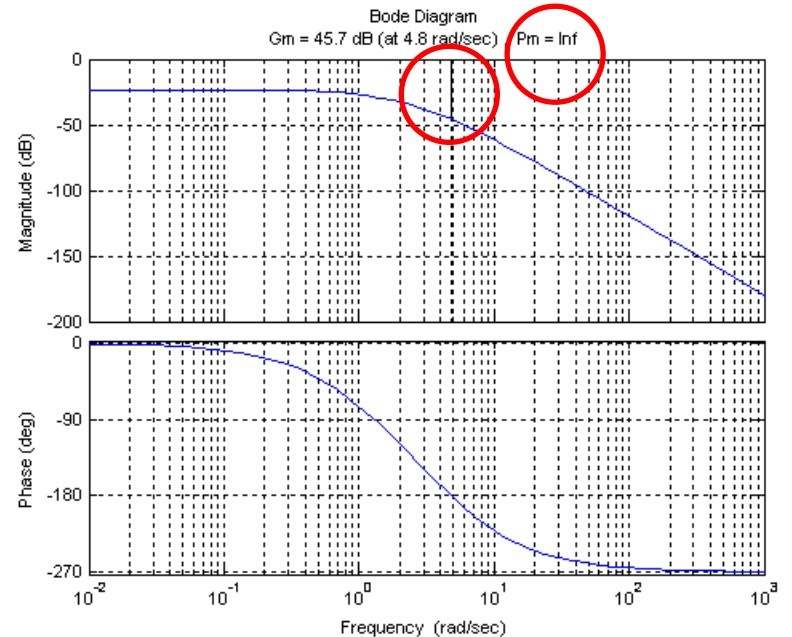
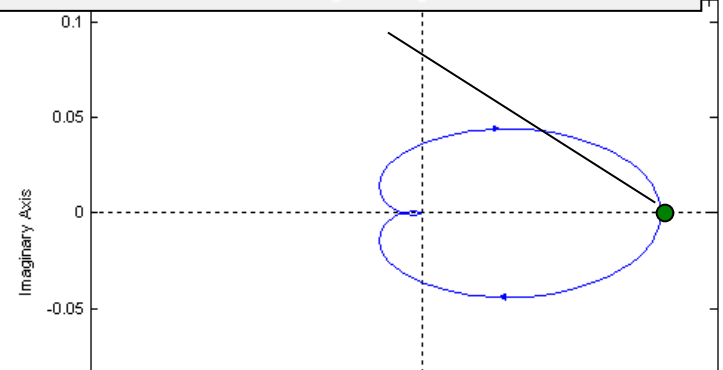
```
hold on
```

```
%
% Bodediagramm mit Amplitudenrand in Bild 2
```

```
figure(2)
margin(G_0)
```

```
hold on
```

**Systemverstärkung**  $K_0 = k_0/15 = 0,0667$



**Unter der Annahme, daß der offene Regelkreis  $G_0(s)$  asymptotisch stabil ist, ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil, wenn**

$$|G_0(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

**gilt.**

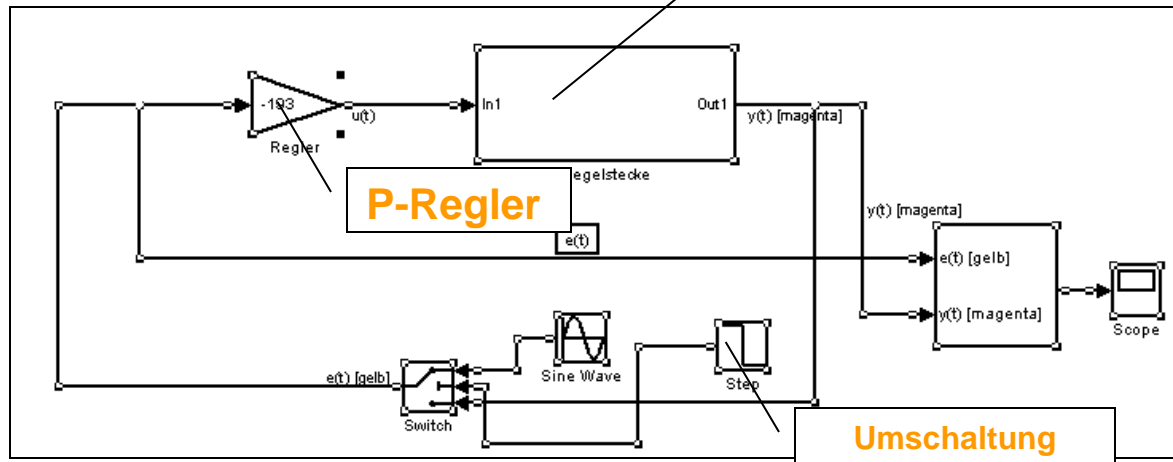
## Anmerkungen:

- **Small-Gain-Theorem ist nur ein **hinreichendes**, nicht aber notwendiges Stabilitätskriterium.**
- **Small-Gain-Theorem kann auf **nichtlineare** Systeme erweitert werden.**

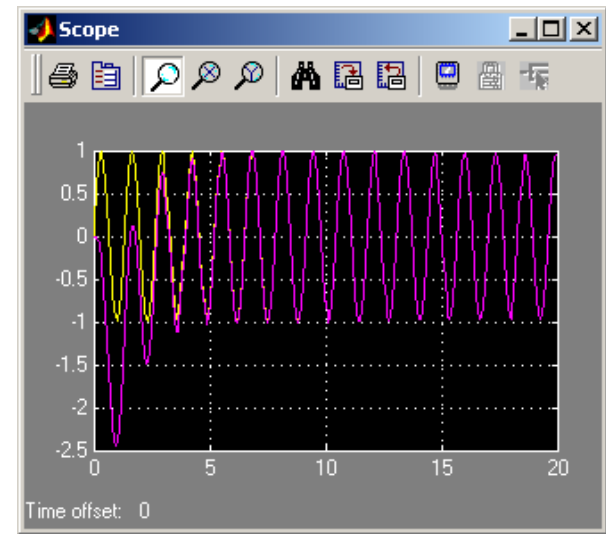


## Simulink-Experiment

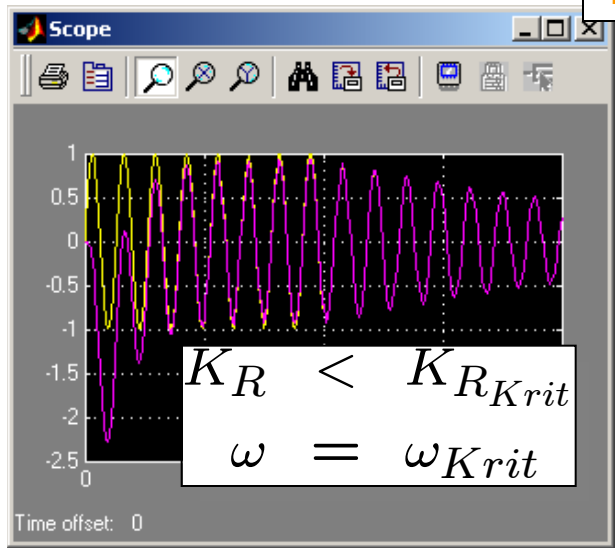
PT<sub>3</sub>-System



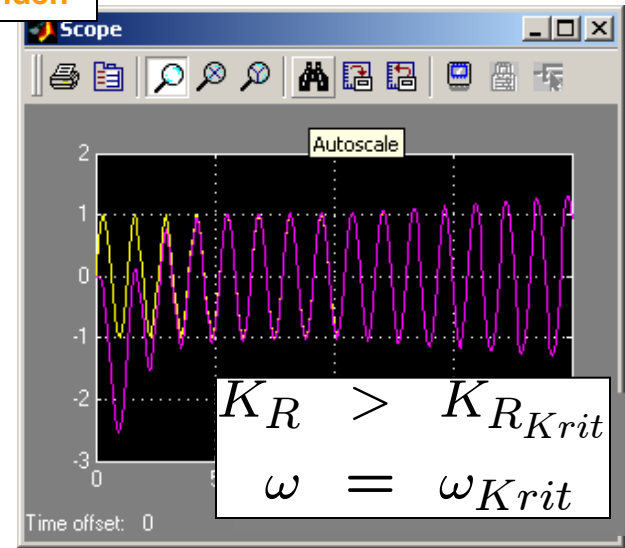
Umschaltung  
nach 5 Sekunden



$$K_R = K_{R_{Krit}}, \quad \omega = \omega_{Krit}$$



$$K_R < K_{R_{Krit}} \\ \omega = \omega_{Krit}$$



$$K_R > K_{R_{Krit}} \\ \omega = \omega_{Krit}$$

