Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines linearen Systems im Frequenzbereich

- **Frequenzgang: Übertragung sinusförmiger Signale unterschiedlicher Frequenzen.**
  - **Amplitude und Phasenverschiebung des Ausgangssignals ist frequenzabhängig.**
  - **Darstellung als komplexe Funktion: Frequenzgang $G(j\omega)$**
  - **Amplitudengang (frequenzabhängige Systemverstärkung).**
  - **Phasengang (Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangssignal).**
  - **$G(j\omega)$ als Randfunktion von $G(s)$ ($G(j\omega) = G(s=j\omega)$).**
- **Ortskurvendarstellung (Nyquist-Ortskurve).**
- **Bode-Diagramm.**

Zusammenfassung der 1. Vorlesung

- **Ortskurve und Bodediagramm des PT_1-Systems.**
  - **Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei ω_E=1/T.**
  - **ω_E : Knick-, Eck- bzw. Grenzfrequenz.**
  - **3 dB: Differenz Amplitudengang und horizontale Asymptote bei ω_E.**
  - **Nach ω_E fällt Amplitudengang mit 20 dB / Dekade ab.**
  - **Phasenverschiebung von $0 \rightarrow -90°$**
  - **Phasenverschiebung bei ω_E : $-45°$**

Zusammenfassung der 1. Vorlesung

- **Ortskurve und Bodediagramm des PT_2-Systems.**
  - **Reelle Pole: Reihenschaltung zweier PT_1-Systeme.**
  - **Komplexe Pole: Charakterisierung durch Dämpfungsgrad D und Eigenfrequenz ω_0.**
  - **Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei ω_0.**
  - **Nach ω_0 fällt Amplitudengang mit 40 dB / Dekade ab.**
  - **Phasenverschiebung von 0 ⇨ -180° .**
  - **Phasenverschiebung bei ω_0 : -90°**
  - **Maximum der Resonanzüberhöhung bei $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2D^2}$.**

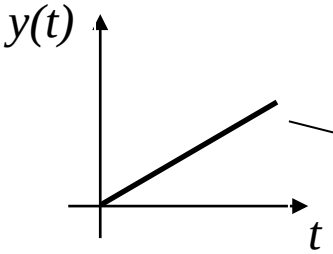
I-System (System ohne Ausgleich)

Differentialgleichung:

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) = K_I u(t)$$

$a_0 = 0$

Sprungantwort:



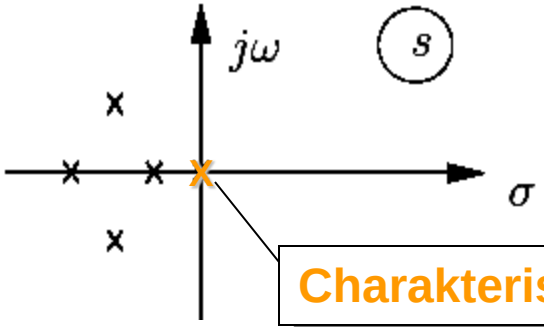
Ideales I-Glied

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K_I}{s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}$$

$$= \frac{K_I}{s} \cdot \frac{1}{(1 + \bar{a}_1 s + \cdots + \bar{a}_{n-1} s^{n-1})}$$

Pole:



Charakteristisch: **Pol im Ursprung**

Frequenzgang: I-System ohne Verzögerung

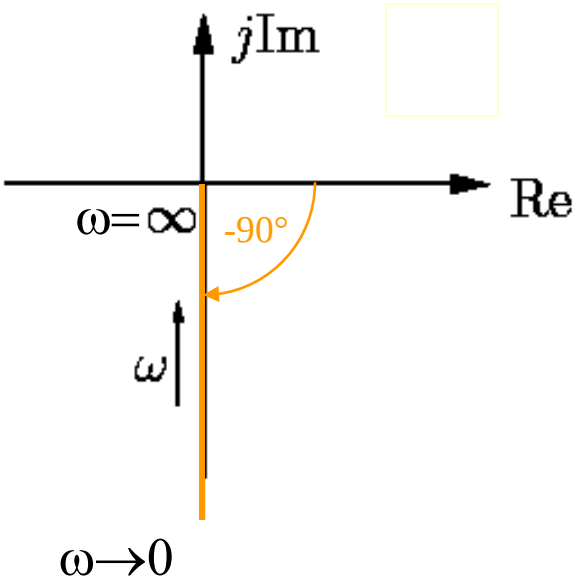
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega} \Rightarrow$$

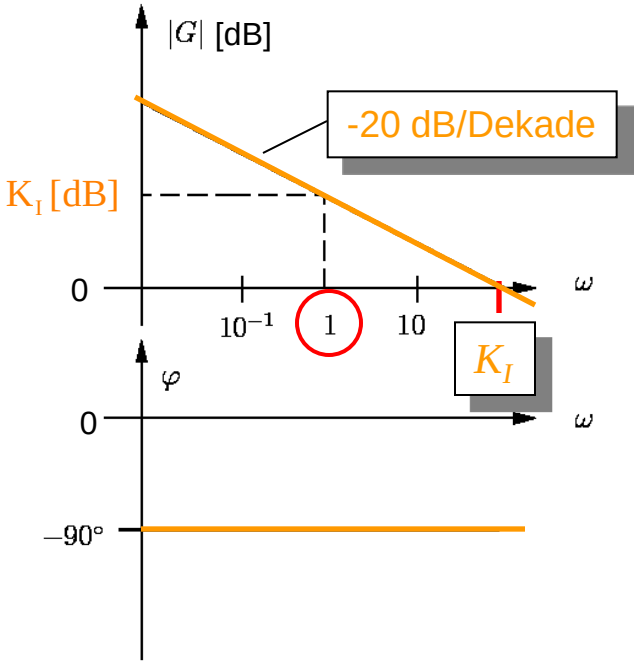
$$G(j\omega) = -j \cdot K_I/\omega$$

$$|G(j\omega)| = K_I/\omega$$

Ortskurve:



Bodediagramm:



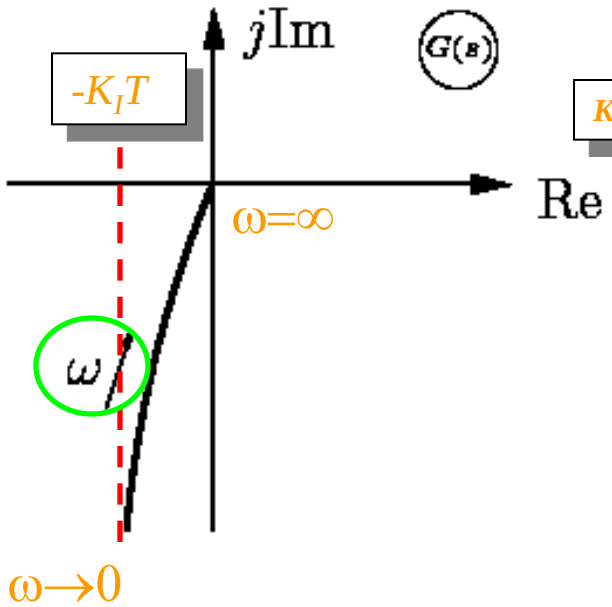
Frequenzgang: IT_1-System

Reihenschaltung von I- und PT_1-Glied

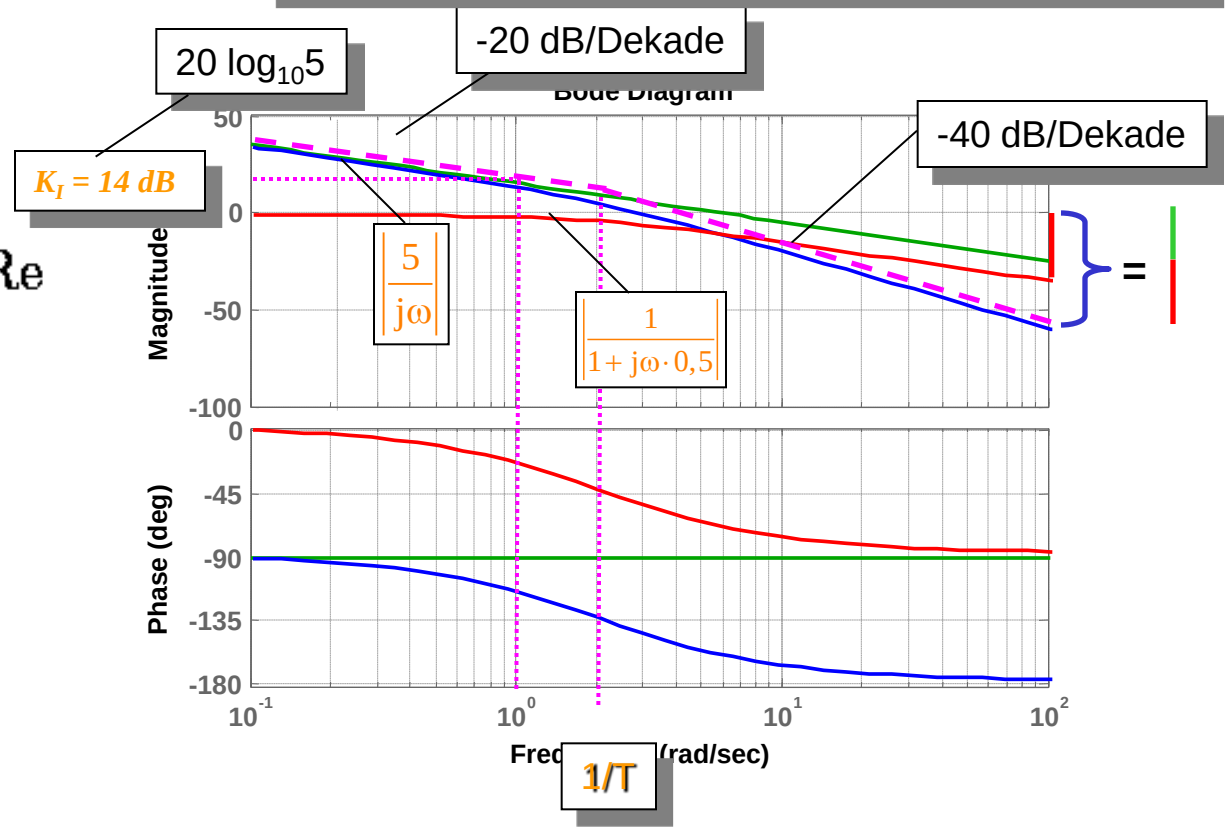
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega(1+j\omega T)} = \frac{-K_I T}{1+\omega^2 T^2} - j\frac{K_I}{\omega(1+\omega^2 T^2)}$$

Ortskurve:



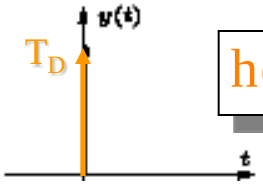
Bodediagramm: (K_I = 5, T=0,5)



D-System (ideales Differenzierglied)

Differentialgleichung: $y(t) = T_D \dot{u}(t)$

Sprungantwort:

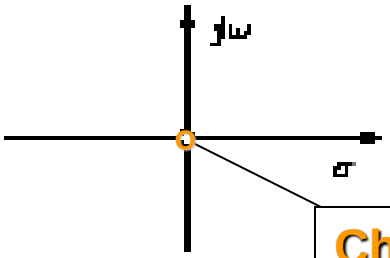


$h(t) = T_D \delta(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = T_D s$

Pole: - - - - -

Nullstellen:

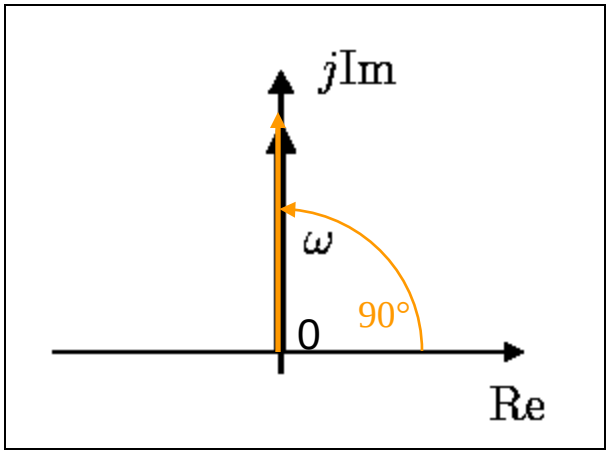


Charakteristisch: **Nullstelle im Ursprung**

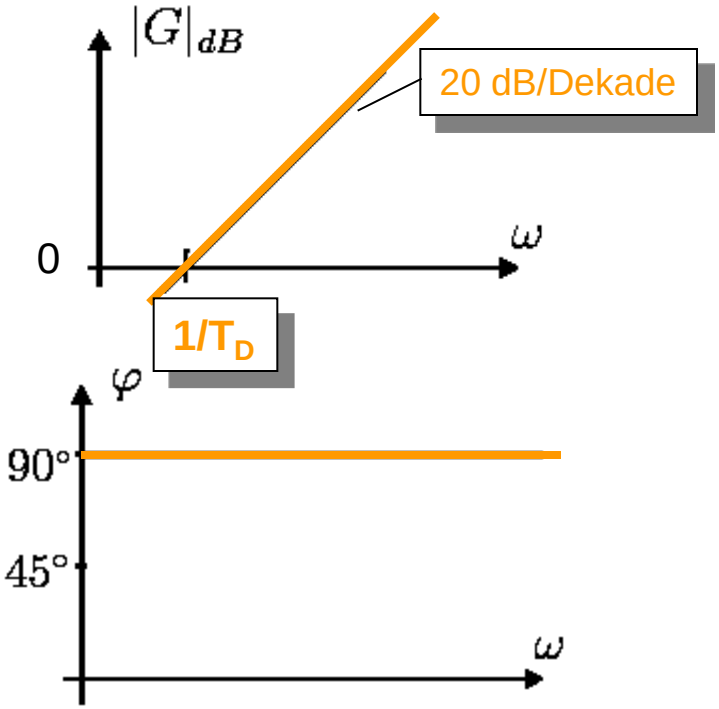
Frequenzgang: D-System ohne Verzögerung

Frequenzgang: $G(j\omega) = jT_D\omega$ ⇨ $|G(j\omega)| = T_D\,\omega$

Ortskurve:



Bodediagramm:

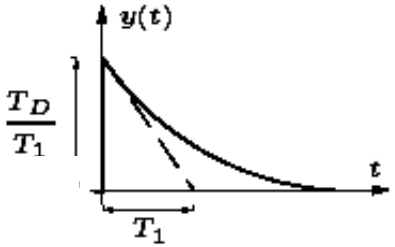


DT_1-System (D-Glied mit Verzögerung)

Differentialgleichung:

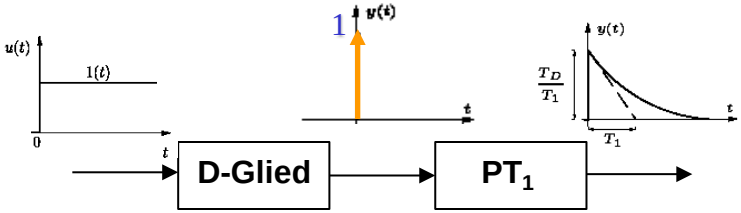
$$T\dot{y}(t) + y(t) = T_D\dot{u}(t)$$

Sprungantwort:



Übertragungsfunktion:

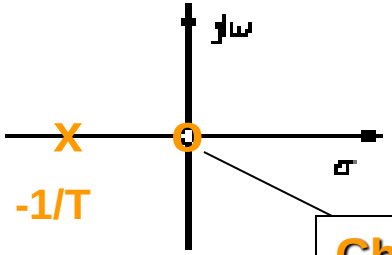
$$G(s) = \frac{T_D s}{Ts + 1}$$



Reihenschaltung PT_1- und D-Glied

Pole:

Nullstellen:



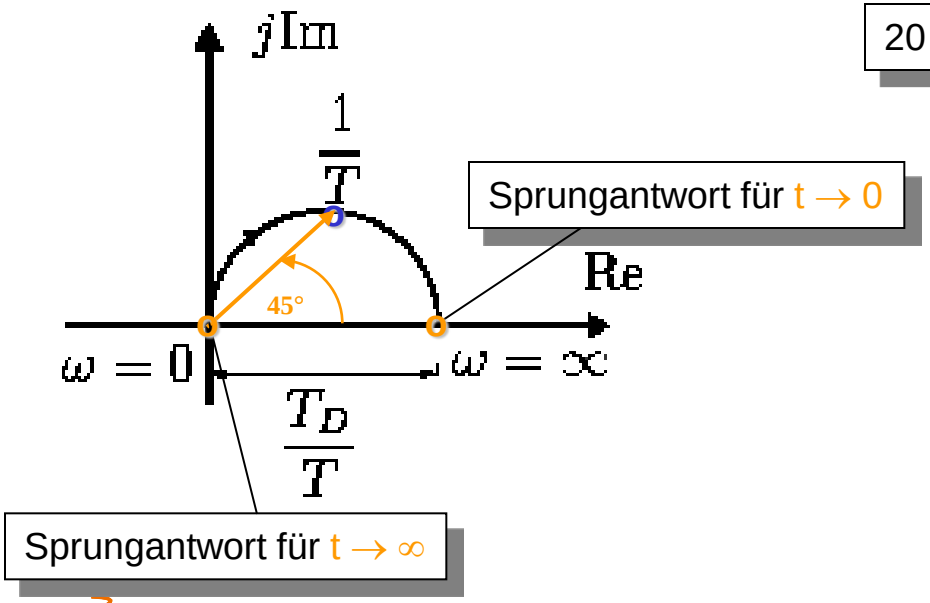
Charakteristisch: Nullstelle im Ursprung

Frequenzgang: DT_1-System

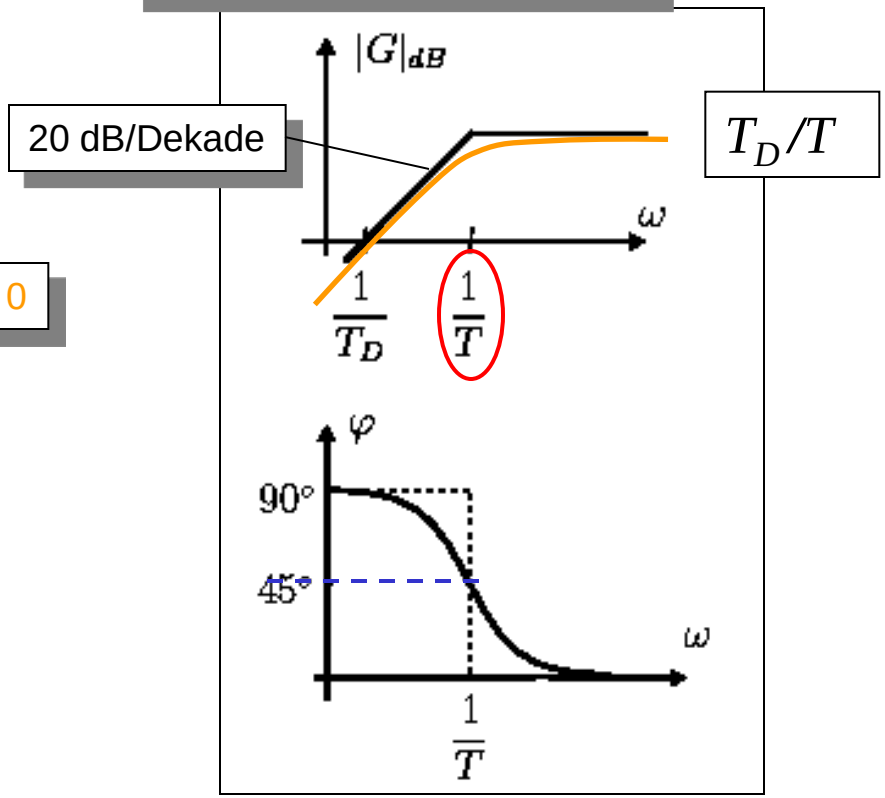
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{T_D\, j\omega}{(1 + j\omega T)} = \frac{\omega^2 T T_D}{\omega^2 T^2 + 1} + j\frac{\omega T_D}{\omega^2 T^2 + 1}$$

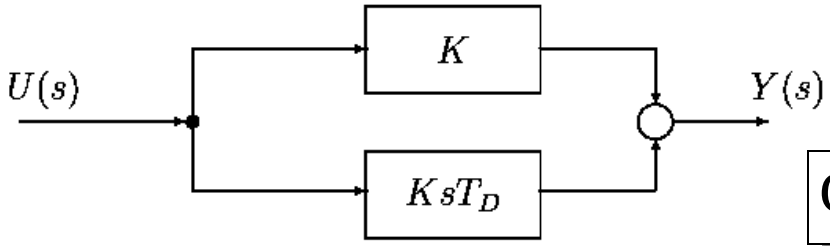
Ortskurve:



Bodediagramm:



PD-System: Parallelschaltung eines P- und eines D-Gliedes

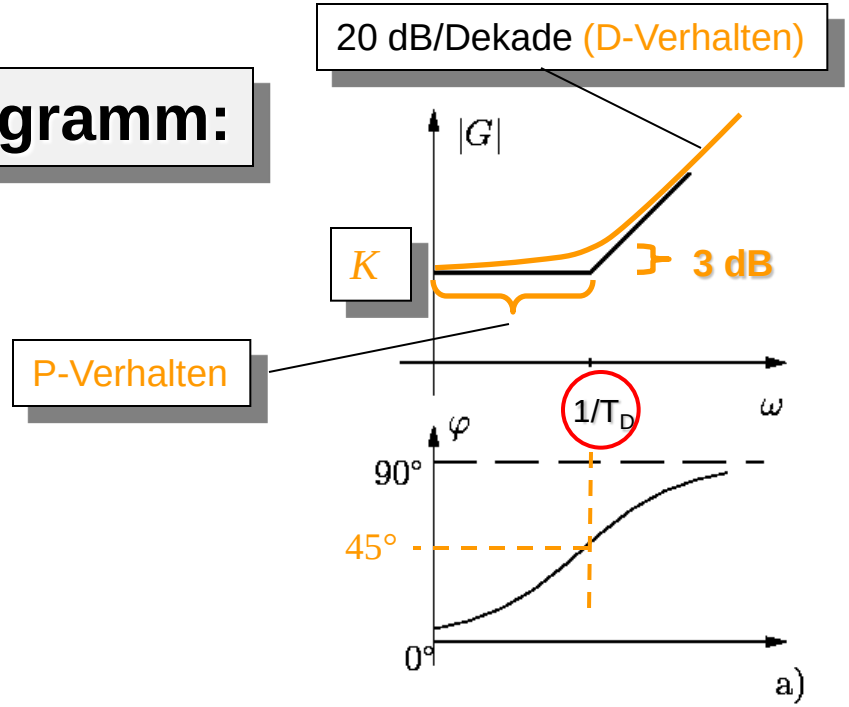


$$G(j\omega) = K + j\omega K T_D$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{K^2 + (\omega K T_D)^2}$$

$$= K\sqrt{1 + (\omega T_D)^2}$$

Bodediagramm:



Für $\omega = 1/T_D$ ergibt sich:

$$|G| = K\sqrt{1+1} \quad = K\sqrt{2}$$

$$|G|_{dB} = K_{dB} + 3{,}03\,dB$$

Definition 2.1:
Phasenminimumsysteme sind Systeme **ohne** Totzeit, deren rationale Übertragungsfunktionen $G(s)$ nur Pole und Nullstellen in der **linken** s-Halbebene haben.

Zwischen der Betragskennlinie (Amplitudengang) und der Phasenkennlinie (Phasengang) besteht ein eindeutiger Zusammenhang.

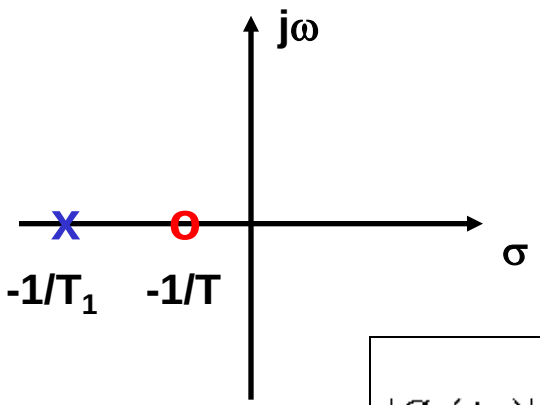
Gesetz von Bode:

$$\varphi(\omega_\nu) = \frac{2\omega_\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln|G(j\omega)| - \ln|G(j\omega_\nu)|}{\omega^2 - \omega_\nu^2} d\omega$$

Allpaß- und Phasenminimumsysteme (2)

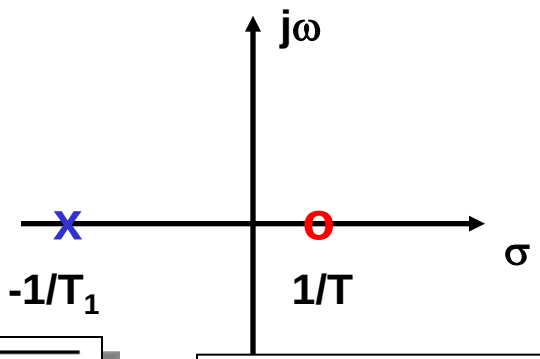
Minimalphasensystem

$$G_1(s) = \frac{1+sT}{1+sT_1}$$



Nichtminimalphasensystem

$$G_2(s) = \frac{1-sT}{1+sT_1}$$



$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+(\omega T)^2}{1+(\omega T_1)^2}}$$

Amplitudengänge identisch

$$\varphi_1(\omega) = -\arctan\frac{\omega(T_1 - T)}{1+\omega^2 T_1 T}$$

$$\varphi_2(\omega) = -\arctan\frac{\omega(T_1 + T)}{1-\omega^2 T_1 T}$$

Phasengänge verschieden

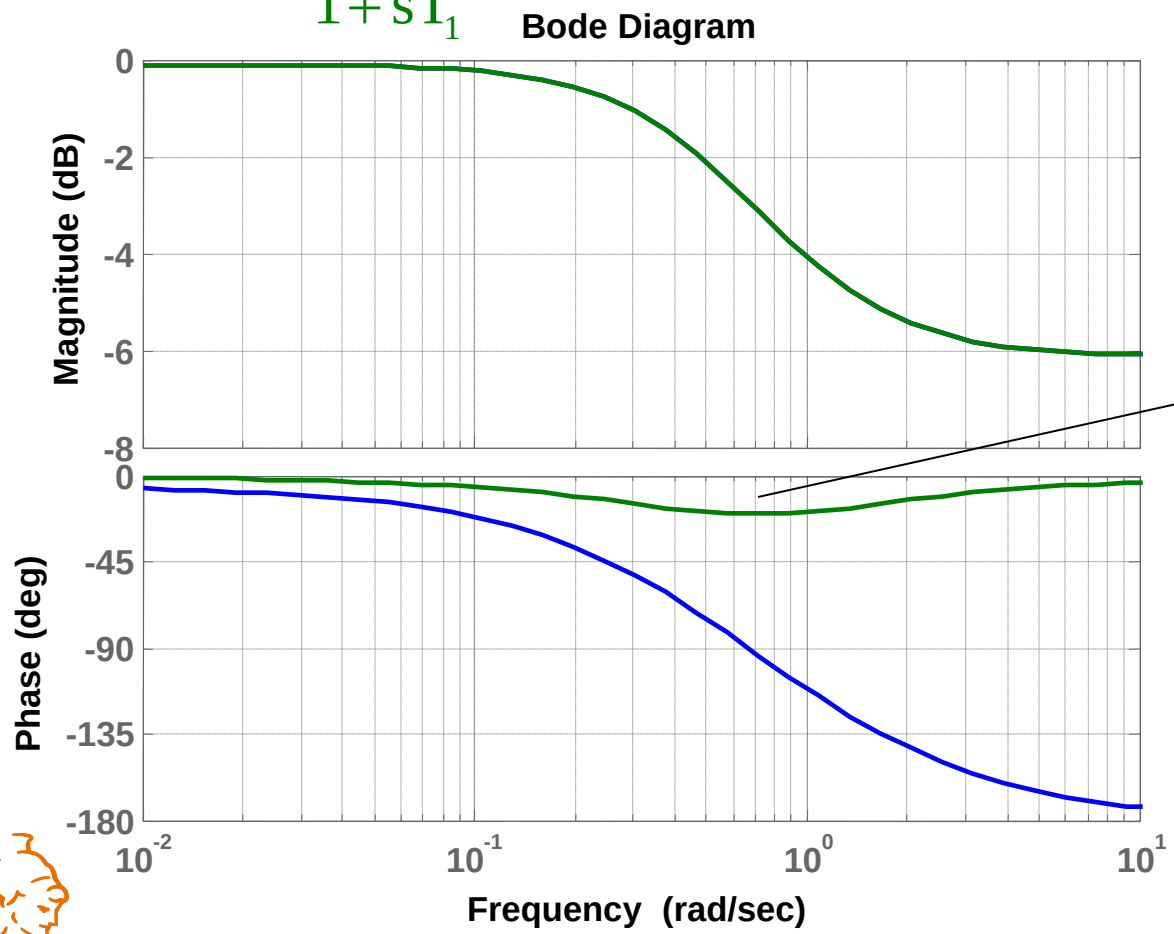
Allpaß- und Phasenminimumsysteme (3)

Minimalphasensystem

$$G_1(s) = \frac{1+sT}{1+sT_1}$$

Nichtminimalphasensystem

$$G_2(s) = \frac{1-sT}{1+sT_1}$$

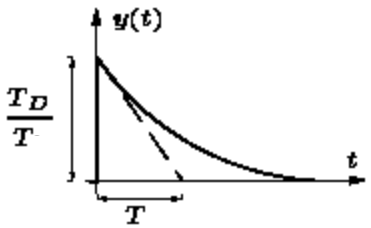


Ein **Phasenminimum-system** hat bei gegebenen Amplitudengang eine **minimale** Phasenverschiebung.

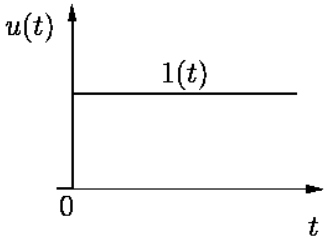
Allpaß- und Phasenminimumsysteme (4)

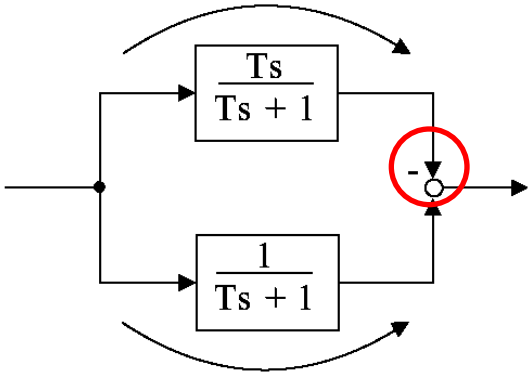
$$G(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT}$$

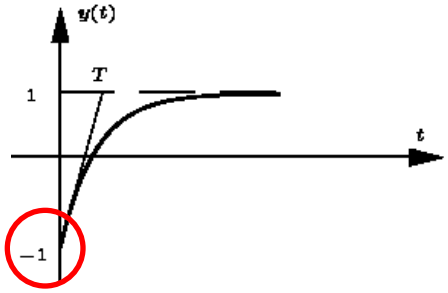
$$= \underbrace{\frac{1}{1+sT}}_{PT_1} - \underbrace{\frac{Ts}{1+sT}}_{DT_1}$$



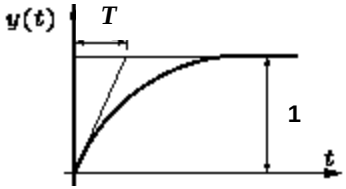
schneller Wirkungsweg





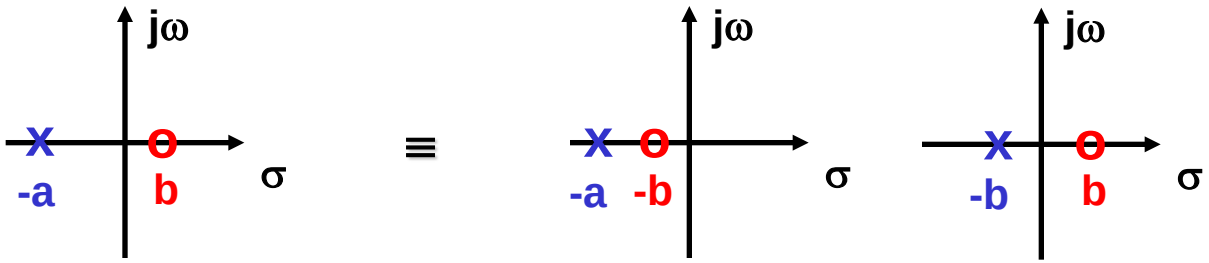


langsamer Wirkungsweg



Allpaß- und Phasenminimumsysteme (5)

Jedes Nichtphasenminimumsystem kann als Reihenschaltung eines Phasenminimumsystems und eines reinen phasendrehenden Gliedes (Allpaßglied) dargestellt werden.



Nichtphasenminimum-system ≡ **Phasenminimum-system** • **Allpaßsystem**

Pole und Nullstellen symmetrisch zur Imaginärachse

$$G(s) = \frac{s-b}{s+a} \equiv G_{PM}(s) = \frac{\cancel{s+b}}{s+a} \cdot G_{AP}(s) = \frac{s-b}{\cancel{s+b}}$$

Definition 2.2

Allpaßsysteme sind Systeme, die für alle Frequenzen den **konstanten** Amplitudengang $|G(j\omega)| = 1$ haben. □

Totzeitsystem

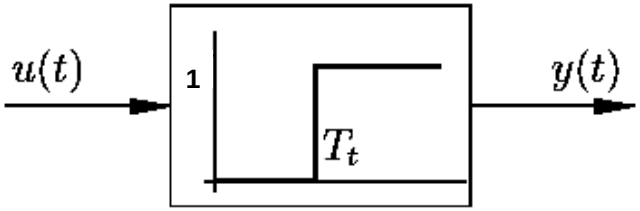
Das Totzeitsystem

$$u(t) = y(t - T_t)$$

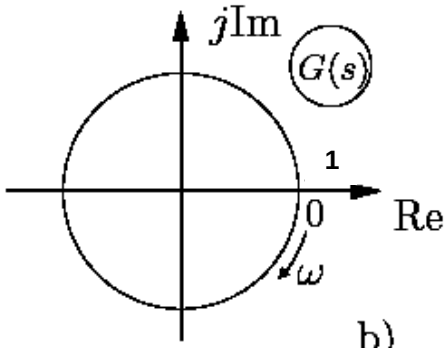
ist ein idealer Allpaß, da aus dem Frequenzgang

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$$

folgt, dass es alle harmonischen Signale ohne Amplitudendämpfung mit einer Phasenverschiebung $\varphi(\omega) = -\omega T_t$ überträgt.



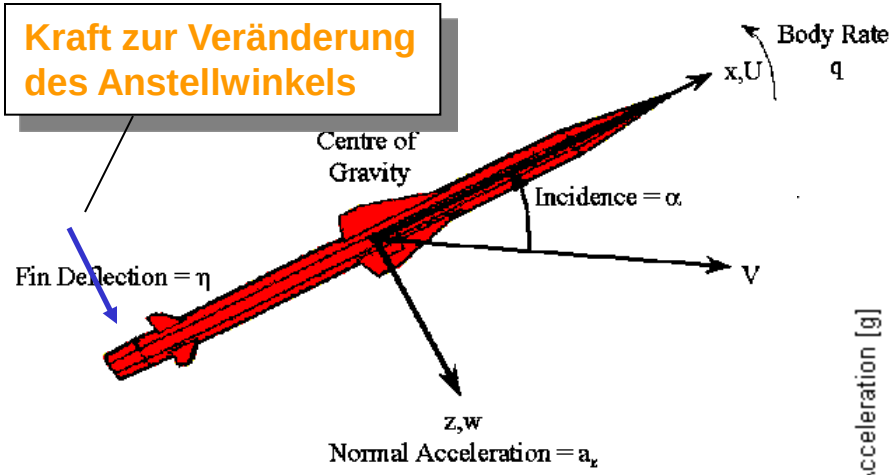
a)

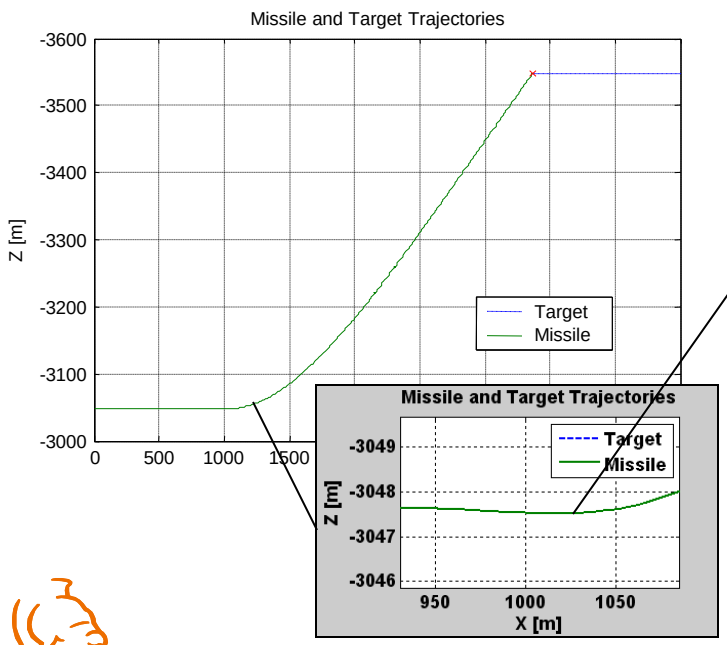
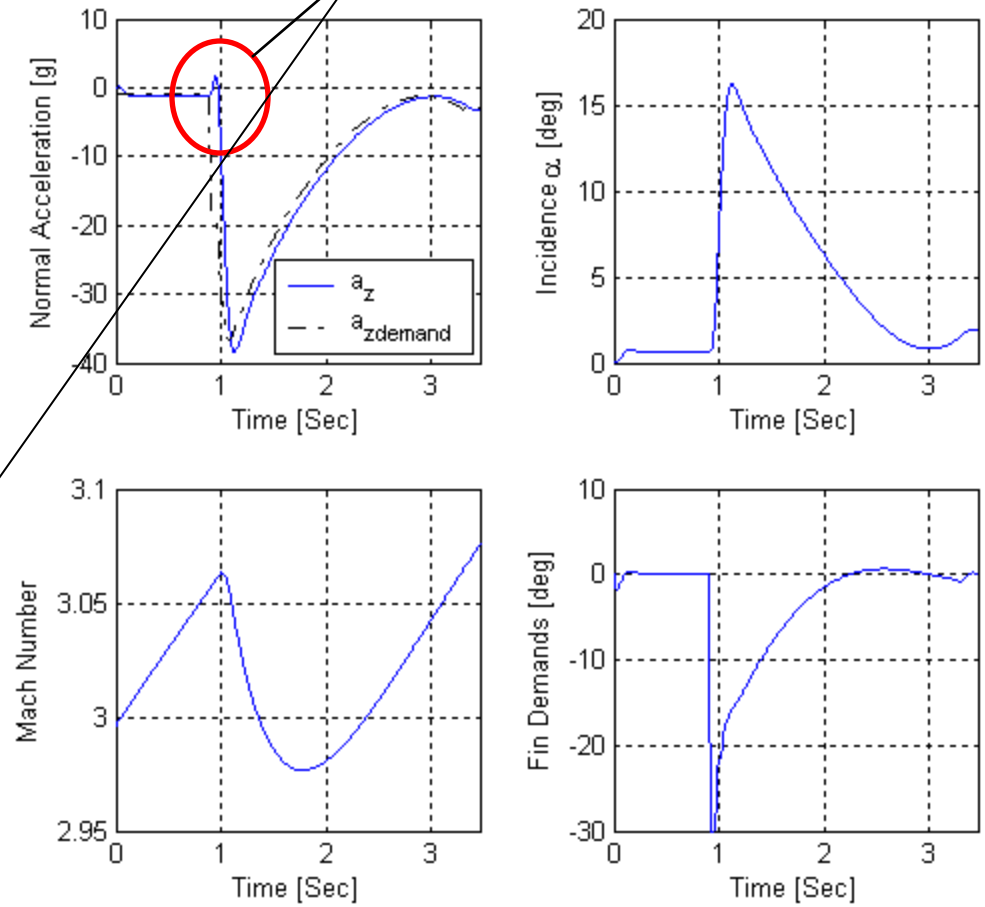


b)

Beispiel: Nichtphasenminimumsystem

Kraft zur Veränderung des Anstellwinkels



Matlab-Demo: Guided Missile Simulation

Allpaßverhalten