



## Übung 5 - Lösung

Thema: BIBO-Stabilität, Steuerbarkeit

### Aufgabe 1. BIBO-Stabilität

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x\end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Aufgabe** Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem BIBO-stabil ist.

**Lösung Aufgabe 1.** Nach Vorlesung 5 ist bekannt, dass ein System BIBO-stabil (*bounded-input-bounded-output*) ist, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal  $u(t) \in \mathbb{R}$  mit einem beschränkten Ausgangssignal  $\psi(\cdot, 0, u(t)) \in \mathbb{R}$  antwortet. Nach Satz 15 der Vorlesung ist bekannt, dass ein System BIBO-stabil ist, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C \cdot e^{At} \cdot B = 0$$

gilt. Ebenso gilt laut der Folgerung von Satz 15 (Satz 16), dass ein System BIBO-stabil ist, wenn alle Eigenwerte von  $A$  einen negativen Realteil besitzen. Dieser Zusammenhang soll nun im Folgenden anhand des gegebenen Beispiels gezeigt werden. Es gilt also zunächst die Eigenwerte von  $A$  zu berechnen. Mit Hilfe der Regel von Sarrus ergibt

sich:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda+4 & 0 \\ -3 & \lambda+2 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ &= (\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1), \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1 \end{aligned}$$

Alle Eigenwerte von  $A$  besitzen also einen negativen Realteil. Nach Satz 16 ist das System also BIBO-stabil. Nun gilt es noch zu zeigen, dass Satz 15 und Satz 16 gleichwertig sind. Dafür muss zunächst die Matrix-Exponentialfunktion berechnet werden. Da die Matrix  $A$  drei unterschiedliche Eigenwerte besitzt, kann diese direkt mit Hilfe der Jordan-Normalform mit

$$e^{At} = e^{T^{-1}JtT} = Te^{Jt}T^{-1}$$

berechnet werden. Es wird also noch die Transformationsmatrix  $T$  gesucht. Mit den drei zugehörigen Eigenvektoren ergibt sich die Matrix  $T$  zu:

$$T = \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich die Matrix-Exponentialfunktion berechnen:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}}_{e^{Jt}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ -2e^{-4t} + 3e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ e^{-4t} - e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun lässt sich der gesuchte Grenzwert direkt berechnen:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_C \cdot \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ -2e^{-4t} + 3e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ e^{-4t} - e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_B \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-4t} + e^{-2t}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis bestätigt also zunächst, dass das System nach Satz 15 BIBO-stabil ist. Durch formales Aufschreiben des Terms  $C \cdot e^{At} \cdot B$  zeigt sich, dass ein System immer dann BIBO-stabil ist, wenn alle Eigenwerte der System-Matrix  $A$  negative Realteile

besitzen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es wird deutlich, dass der Grenzwert allein von der Matrix-Exponentialfunktion abhängt, da die Matrizen  $B$  und  $C$  konstant sind. Und da die Zeitabhängigkeit der Matrix-Exponentialfunktion nur von den Eigenwerten der Matrix  $A$  abhängt, ist der betrachtete Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} C \cdot e^{At} \cdot B$  immer genau dann gleich Null, wenn das System nur Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzt. Demnach ist das System in diesem Fall immer BIBO-stabil.

### Aufgabe 2. Stabilität transformierter Systeme

Gegeben sind die beiden folgenden ähnlichen Zustandsysteme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}. \end{aligned}$$

Es gilt  $A, \tilde{A} = TAT^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $B, \tilde{B} = TB \in \mathbb{F}^{n \times m}$  und  $C, \tilde{C} = CT^{-1} \in \mathbb{F}^{q \times n}$ . Desweiteren beschreibt  $T \in \mathbb{F}^{n \times n}$  die Zustandstransformation, die den Zustandsvektor  $x$  in den Zustandsvektor  $\tilde{x}$  überführt.

**Aufgabe** Zeigen Sie, dass das Zustandssystem  $x$  genau dann BIBO-stabil ist, wenn das Zustandssystem  $\tilde{x}$  BIBO-stabil ist.

**Lösung Aufgabe 2.** Wie bereits in Aufgabe 2 behandelt, ist ein System genau dann BIBO-stabil, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C \cdot e^{At} \cdot B = 0$$

gilt. Laut Aufgabenstellung ist das Zustandssystem  $\tilde{x}$  BIBO-stabil, daher gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B} = 0.$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B} &= \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} \cdot \underbrace{e^{TAT^{-1}t}}_{e^{At}} \cdot \underbrace{TB}_{\tilde{B}} \\ &= C \underbrace{T^{-1}T}_{=I} e^{At} \underbrace{T^{-1}T}_{=I} B \\ &= Ce^{At}B. \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass die beiden Ausdrücke  $\tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B}$  und  $Ce^{At}B$  der gegebenen

Systeme identisch sind. Da die BIBO-Stabilität vom Grenzwert dieser beiden Ausdrücke abhängt, ist also das Zustandssystem  $x$  dann BIBO-stabil, wenn Zustandssystem  $\tilde{x}$  BIBO-stabil ist. Die Zustandstransformation hat also keinen Einfluss auf die BIBO-Stabilität eines Zustandssystems.

*Hinweis:* Die Umformung in dem gezeigten Beweis

$$e^{YXY^{-1}} = Y e^X Y^{-1}$$

gilt allgemein für alle invertierbaren Matrizen  $Y$ .

### Aufgabe 3. Steuerbarkeit eines Zustandssystems

Gegeben ist das Zustandssystem  $\dot{x} = Ax + Bu$  mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe** Zeigen sie, dass das gegebene Zustandssystem steuerbar ist.

**Lösung Aufgabe 3.** Nach Vorlesung 5 ist ein System steuerbar, wenn für alle  $x_0, x_1 \in \mathbb{F}^n$  eine Zeit  $t \geq 0$  existiert, in der das System mit einem zulässigen Eingangssignal  $u(t)$  von  $x_0$  in  $x_1$  überführt wird. Für den Nachweis der Steuerbarkeit gibt es zwei Kriterien:

1. Kalman-Kriterium: Die Steuerbarkeitsmatrix  $R(A, B) = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  besitzt vollen Rang. Also  $\text{rang}(R) = n$ .
2. Hautus-Kriterium: Für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A$  besitzt die Matrix  $[(\lambda_i I - A), B]$  vollen Rang. Also  $\text{rang}[(\lambda_i I - A), B] = n$ .

Die Anwendbarkeit der beiden Kriterien wird im Folgenden an dem gegebenen System gezeigt.

1. Kalman-Kriterium:

$$\begin{aligned} R(A, B) &= \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es wird sofort deutlich, dass der Rang von der Matrix  $R(A, B) = 2 = n$  ist. Somit ist das gegebene System nach dem Kalman-Kriterium steuerbar

2. Hautus-Kriterium:

Beim Betrachten der Matrix  $A$  fällt sofort auf, dass diese bereits Jordan-Normalform besitzt und die 0 der einzige Eigenwert ist. Es ist also nur für den Eigenwert 0

die Bedingung von Hautus zu prüfen. Es folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} [(\lambda_i I - A), B] &= \left[ \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist sofort erkennbar, dass der Rang der erhaltenen Matrix gleich 2 ist und auch gleich  $n$ . Das System ist nach dem Hautus-Kriterium also steuerbar.