F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2019

Übung 4 - Lösung

Thema: Stabilität von Systemen nach Lyapunov

Aufgabe 1. Lyapunov-Gleichung

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben

a) Lösen Sie die Lyapunov-Gleichung

$$A^T P + PA = -Q \quad , \quad P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

für $Q = I$.

b) Folgern Sie aus dem Resultat aus Aufgabe a), dass das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil ist.

Lösung Aufgabe 1.

a) Gesucht ist die symmetrische Matrix P, die die in der Aufgabe angegebene Lyapunov-Gleichung erfüllt. Es gilt also, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Durch das Zusammenfassen der linken Seite ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 & -8x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem ist offensichtlich überbestimmt und die Gleichung $-4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ ist zweifach vorhanden. Es kann somit eine der beiden Gleichungen gestrichen werden. Umgeschrieben in ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ ergibt sich dann:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

Durch Lösung des Gleichungssystems ergibt sich dann die gesuchte Matrix P zu:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{7}{36} \\ -\frac{7}{36} & \frac{23}{36} \end{pmatrix}.$$

b) Nach Satz 13 der Vorlesung ist bekannt, dass durch das finden einer positiv definiten symmetrischen Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die die Gleichung

$$A^T P + PA = -I$$

erfüllt, die asymptotische Stabilität für das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ gezeigt werden kann. Für den Nachweis der asymptotischen Stabilität muss also die erhaltene Matrix P auf positive Definitheit geprüft werden. Die Definitheit ist über die Vorzeichen der Eigenwerte bestimmt, eine positiv definite Matrix weißt beispielsweise nur positive Eigenwerte auf, ist also im Allgemeinen über das Berechnen der Eigenwerte zu zeigen. Da dies bei größeren Matrizen sehr aufwendig sein kann und in diesem Fall nur der Nachweis über positive Definitheit erforderlich ist, kann dies beispielsweise auch mit dem Kriterium von Sylvester gezeigt werden. Dieses liefert eine Aussage ob eine Matrix positiv oder negativ definit ist, für indefinite oder semidefinite Matrizen liefert es hingegen keine Aussage. Für das Kriterium müssen alle Hauptminoren (Determinanten aller existierenden Untermatrizen) der Matrix berechnet werden. Sind alle diese Hauptminoren positiv, ist die Matrix positiv definit. Ist der erste Hauptminor negativ, der zweite Hauptminor positiv, der dritte negativ, usw. ist die Matrix negativ definit. In allen anderen Fällen liefert das Kriterium keine Aussage und es müssen die Eigenwerte der Matrix geprüft werden.
Für die beiden Hauptminoren von P gilt

$$\det H_1 = \frac{11}{36} > 0, \quad \det H_2 = \det P = \frac{17}{108} > 0\,,$$

sodass die Matrix P nach dem Satz von Silvester positiv definit ist. Das System ist nach Satz 13 der Vorlesung daher asymptotisch stabil.

Aufgabe 2. Stabilität nach Lyapunov
Gegeben ist folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Zeigen Sie mit Hilfe der Lyapunov-Gleichung, dass das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil ist.

Lösung Aufgabe 2. Wie bereits in Aufgabe 2.) angewandt, ist durch das finden einer positiv definiten symmetrischen Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die die Gleichung

$$A^T P + PA = -I$$

erfüllt, die asymptotische Stabilität für das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ nachweisbar.

Gesucht ist daher die symmetrische Matrix P, die die in der Aufgabe angegebene Lyapunov-Gleichung erfüllt. Es ist also das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^T} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{-I}$$

zu lösen. Es gilt also ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $(x_1, \ldots, x_6) = x$ zu lösen. Es gilt also die oben dargestellte Gleichung in die Form $M \cdot x = b$ zu bringen. Dazu wird das Gleichungssystem zunächst explizit aufgestellt:

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} (-1-1) & (1+1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & (-1-2) & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ -2 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & (-2-1) & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & (-2-2) & (1+1) & \cdot & -1 \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & -2 & 1 & 0 \\ -2 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & -2 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & (-2-2) & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{array}\right).$$

Es zeigt sich, dass die Zeilen (2) und (4), (3) und (7) sowie (6) und (8) linear abhängig bzw. identisch sind und somit für die Lösung des Gleichungssystems jeweils nur eine der beiden Zeilen erforderlich ist. Daraus ergibt sich dann das folgende Gleichungssystem, was es zu lösen gilt:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & -3 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ -2 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -4 & -2 & \cdot & -1 \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & -2 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & -4 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{array}\right].$$

Zur Lösung wird das Gleichungssystem im folgenden in Zeilenstufenform überführt. Dazu werden zunächst die Spalten (3) und (6) vertauscht:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & -3 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 0 \\ -2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -4 & -2 & \cdot & -1 \\ \cdot & -2 & 1 & \cdot & -2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -4 & -1 \end{array}\right].$$

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus wird das Gleichungssystem dann in Zeilenstufenform überführt, welche die folgende Form besitzt:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & -3 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2 & 3 & -5 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -4 & 10 & -7 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Das Gleichungssystem lässt sich in dieser Form dann von unten nach oben sukzessive auflösen:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{4}\,, \\ x_5 &= \left(-7 - 10 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{-4} = \frac{19}{8}\,, \\ x_4 &= \left(3 + \frac{5}{4} - \frac{3 \cdot 19}{8}\right) \cdot \frac{1}{-2} = \frac{23}{16}\,, \\ x_6 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{6 \cdot 19}{8} - 2 \cdot \frac{23}{16}\right) \cdot \frac{1}{-3} = \frac{47}{8}\,, \\ x_2 &= \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{19}{8}\right) \cdot \frac{1}{-2} = \frac{9}{16}\,, \\ x_1 &= \left(1 + \frac{18}{16}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{16}\,. \end{aligned}$$

Die gesuchte Matrix P ergibt sich also zu:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{17}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{16} & \frac{23}{16} & \frac{19}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{19}{8} & \frac{47}{8} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 13 der Vorlesung ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil, wenn die Matrix P positiv definit ist. Die erhaltene Matrix P muss also auf positive Definitheit geprüft werden. Dies erfolgt analog zur Aufgabe 2.) mit dem Kriterium nach Sylvester.

Die erste Hauptminore der betrachteten Matrix P lässt sich einfach ablesen:

$$H_1 = \frac{17}{16} > 0\,.$$

Die zweite Hauptminore ergibt sich aus der oberen linken (2x2)-Matrix:

$$H_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{17}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{23}{16} \end{pmatrix} = \frac{155}{128} > 0\,.$$

Die dritte und letzte Hauptminore ist die Matrix selbst. Es gilt also die Determinante von P zu berechnen:

$$H_3 = \det P = \det \begin{pmatrix} \frac{17}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{16} & \frac{23}{16} & \frac{19}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{19}{8} & \frac{47}{8} \end{pmatrix} = \frac{435}{256} > 0\,.$$

Es sind also alle Hauptminoren positiv und die Matrix P damit positiv definit. Das betrachtete Zustandssystem ist somit asymptotisch stabil.