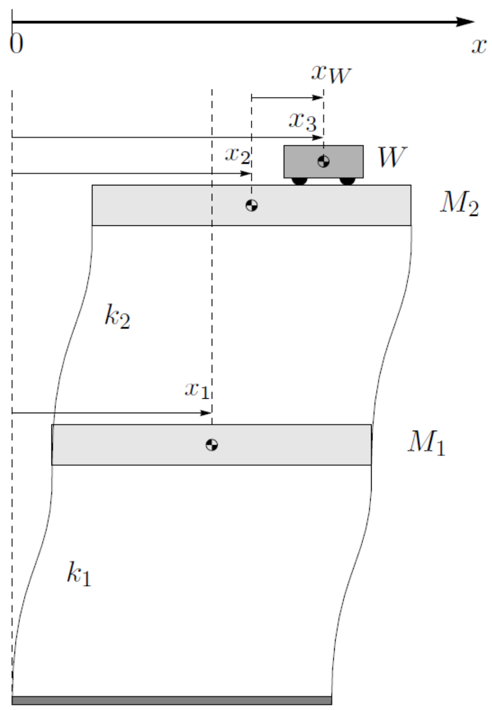
F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2019

Übung 1 - Lösung

Thema: Aufstellen von Zustandsraummodellen

Aufgabe 1. Aufstellen eines Zustandsraummodelles
Gegeben ist das Modell einer einem zweistöckigen Gebäude nachempfundenen Struktur mit einer beweglichen Masse zur Schwingungsunterdrückung. Die Stockwerke werden mit den beiden



Massen M_1 und M_2 modelliert. Die Biegung der Gebäudestruktur zwischen den Stockwerken wird mit zwei linearen Federn mit den Steifigkeiten k_1 bzw. k_2 beschrieben. Außer den horizontalen Bewegungen der Massen werden alle anderen Bewegungsrichtungen ebenso vernachlässigt wie Reibungskräfte. Als Aktuator zur Schwingungsunterdrückung fungiert ein Wagen W, der sich horizontal entlang von M_2 bewegen kann.

Aufgabe Bestimmen Sie das 6-dimensionales Zustandsraummodell des beschriebenen Problems. Die Zustandsgrößen stellen dabei die x-Koordinaten der drei Massenschwerpunkte sowie deren zeitlichen Ableitungen dar. Die Beschleunigung des Wagens W relativ zu M_2 wird dabei als Eingangssignal, d.h. $u := \ddot{x}_W$, betrachtet.

Lösung Aufgabe 1.
Zunächst werden alle auf das System wirkenden Kräfte aufgestellt

	Betrag der Kraft	Richtung
Masse 1	$M_1 \cdot \ddot{x}_1$	$\leftarrow$
	$k_1 \cdot x_1$	$\leftarrow$
	$k_2 \cdot (x_2 - x_1)$	$\rightarrow$
Masse 2	$M_2 \cdot \ddot{x}_2$	$\leftarrow$
	$k_2(x_2 - x_1)$	$\leftarrow$
	$M_W \cdot (\ddot{x}_2 + u)$	$\leftarrow$
Wagen	$M_W \cdot \ddot{x}_3$	$\leftarrow$
	$M_W(\ddot{x}_2 + u)$	$\rightarrow$

Aus dem dynamischen Gleichgewicht des Systems ergeben sich dann die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} -M_1 \cdot \ddot{x}_1 - k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) &= 0; \\ -M_2 \cdot \ddot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - M_W(\ddot{x}_2 + u) &= 0; \\ -M_W \cdot \ddot{x}_3 + M_W(\ddot{x}_2 + u) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Umstellen nach der jeweils höchsten zeitlichen Ableitung ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{k_1 + k_2}{M_1} x_1 - \frac{k_2}{M_1} x_2, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{k_2}{M_2 + M_W} x_1 - \frac{k_2}{M_2 + M_W} x_2 - \frac{M_W}{M_2 + M_W} u, \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{k_2}{M_2 + M_W} x_2 + \frac{k_2}{M_2 + M_W} x_1 + \frac{M_2}{M_2 + M_W} u. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Bewegungsgleichungen lässt sich nun das Zustandsraummodell $\dot{x} = Ax + Bu$ mit dem Zustandsvektor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ mit $\dot{x}_1 = x_4$, $\dot{x}_2 = x_5$ und $\dot{x}_3 = x_6$ aufstellen. Für die Matrizen A und B ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{M_1} & -\frac{k_2}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{M_2+M_W} & -\frac{k_2}{M_2+M_W} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{M_2+M_W} & -\frac{k_2}{M_2+M_W} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{M_W}{M_2+M_W} \\ \frac{M_2}{M_2+M_W} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Zustandsraum-Modelle

Gegeben sind die vier folgenden Übertragungsfunktionen

1. $H_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_1(s) = \frac{1}{s^2}$,
2. $H_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_2(s) = \frac{(s+1)^2}{(s-1)^2}$,
3. $H_3 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_3(s) = \frac{\omega^2}{s^2+2D\omega s+\omega^2}, \quad \omega, D > 0$,
4. $H_4 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_4(s) = \frac{s+1}{s^2+2D\omega s+\omega^2}, \quad \omega, D > 0$.

Aufgaben

a) Bestimmen Sie aus den Übertragungsfunktionen 1–3 jeweils das zugehörige Zustandsraum-Modell

b) Betrachten Sie das System $Y(s) = H_1(s) \cdot U_1(s) + H_3(s) \cdot U_2(s)$ und bestimmen dessen Zustandsraum-Modell

c) Betrachten Sie das System $Y(s) = H_3(s) \cdot U_1(s) + H_4(s) \cdot U_2(s)$ und bestimmen dessen Zustandsraum-Modell

d) Berechnen Sie das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u)$ von System 1 für das Eingangssignal $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$

Lösung Aufgabe 2.

Aus der 2. Vorlesung ist bekannt, dass folgende allgemeine propere Übertragungsfunktionen

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

in eine Summe aus einer Konstante und einer streng properen Funktion

$$H(s) = \frac{b_n}{a_n} + \underbrace{\frac{\tilde{b}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}}_{\tilde{H}(s)}$$

mit den Konstanten

$$\tilde{a}_k = \frac{a_k}{a_n},\ \tilde{b}_k = \frac{b_k - b_n \tilde{a}_k}{a_n},\ k < n$$

zerlegbar ist. Aus der Vorlesung ist ebenfalls bekannt, dass aus der streng properen Übertragungsfunktion $\tilde{H}(s)$ die Beobachtungsnormalform

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\tilde{a}_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\tilde{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

ermittelt werden kann. Für den Fall $b_n = 0$ gilt $H(s) = \tilde{H}(s)$, sodass das entsprechende Zustandsraum-Modell identisch mit der Beobachtungsnormalform von $\tilde{H}(s)$ ist. Im Fall $b_n \neq 0$

ergibt sich das Zustandsraum-Modell ebenfalls aus der Beobachtungsnormalform mit der Matrix $D = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)$.

a) Für alle drei Zustandsraum-Modelle gilt $C = (0, 1)$

1. Die Übertragungsfunktion $H_1(s)$ ist bereits streng proper, sodass unmittelbar folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = (0).$$

2. Es ist $a_n = b_n$, sodass die Übertragungsfunktion $H_2(s)$ nur proper ist. Wie angegeben lässt sich die Übertragungsfunktion wie folgt zerlegen:

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - 2s + 1} = 1 + \frac{4s}{s^2 - 2s + 1}.$$

Damit liegt eine Summe aus einer Konstanten und eine streng properen Übertragungsfunktion vor, sodass folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = (1).$$

3. Die Übertragungsfunktion $H_2(s)$ ist ebenfalls bereits streng proper:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & -2D\omega \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = (0).$$

b) Es werden zwei unterschiedliche Übertragungsfunktionen mit zwei unterschiedlichen Eingängen zu einem Ausgang zusammengeführt. Aus der 2. Vorlesung ist bekannt, dass sich zwei Systeme wie folgt zusammenfassen lassen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$(y) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Da beide Zustandsraum-Modelle bereits in Aufgabe a) ermittelt wurden, folgt für das betrachtete System unmittelbar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 1 & -2D\omega \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Die beiden zusammenzufassenden Übertragungsfunktionen weisen das gleiche Nennerpolynom auf, sodass beide Systeme die selben Zustände besitzen und somit auch eine identische A-Matrix aufweisen. Die Übertragungsfunktion 4 ist bereits streng proper, sodass das Zustandsraum-Modell unmittelbar folgt:

$$(\dot{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & -2D\omega \end{pmatrix} \cdot (x) + \begin{pmatrix} \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$
$$(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

d) Aus der 1. Vorlesung ist bekannt (Satz 3), dass für Systeme im komplexen mit der Übertragungsfunktion $H(i\omega)$ und dem Eingang

$$u(t) = \mathrm{e}^{i\omega t} \cdot u_0$$

sich das Ausgangssignal ψ wie folgt berechnen lässt:

$$\psi(t, x_0, u) = H(i\omega) \cdot u(t)\,.$$

Für Zustandsraum-Modelle berechnet sich die Übertragungsfunktion nach der Vorlesung mit

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D\,.$$

Gefragt ist nach dem Zustandssignal φ, sodass sich die erforderliche Übertragungsfunktion mit $C = I$ und $D = 0$ zu

$$H(s) = (sI - A)^{-1}B$$

ergibt. Um sich Satz 5 aus der Vorlesung zur Lösung der Aufgabe zu nutze zu machen, wird ein komplexes Ersatzsignal $\tilde{u}(t)$ mit

$$\tilde{u}(t) = \mathrm{e}^{i\omega t} \cdot u_0$$

definiert und es zeigt sich unmittelbar, dass $u(t) = \mathrm{Im}\{\tilde{u}(t)\}$ gilt. Für ein rein reelles Übertragungssystem H gilt dann $\varphi(t, x_0, u) = \mathrm{Im}\{\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t))\}$.

Zunächst gilt es, die Übertragungsmatrix $H(i\omega)$ zu berechnen. Die erforderlichen Matrizen des Zustandsraum-Modells sind bereits aus Aufgabe a) bekannt, sodass sich $H(i\omega)$ mit

$$\left[\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \cdot \frac{1}{\omega} \\ -\frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

berechnen lässt. Das komplexe Zustandssignal ergibt sich dann zu:

$$\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t)) = \begin{pmatrix} -i \cdot \frac{1}{\omega} \\ -\frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{[\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)] \cdot u_0}_{\tilde{u}(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} - i \cdot \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \\ -\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} - i \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} \end{pmatrix} \cdot u_0$$

Wie am Anfang der Aufgabe festgestellt, ergibt sich das gesuchte Zustandssignal dann zu:

$$\varphi(t, x_0, u) = \mathrm{Im}\{\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u})\} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \\ -\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} \end{pmatrix} \cdot u_0$$