# 9. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

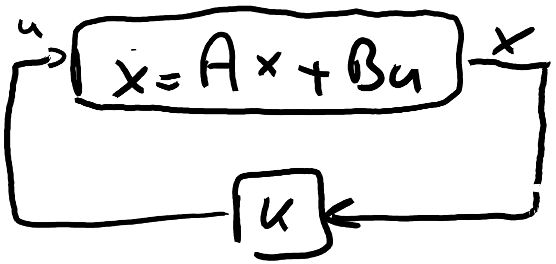
## Beobachtbarkeit & Entwurf von Beobachtern

**Felix Goßmann M.Sc.**

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

## Lüneberger Beobachter

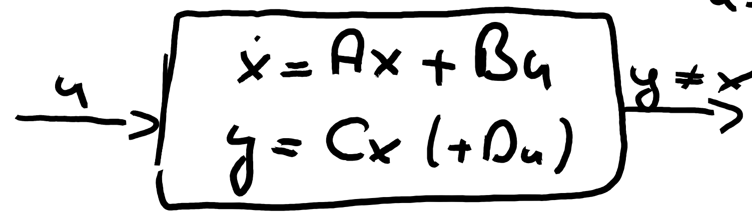
$u = Kx$




$u = Ky$

$u = KCx$

Realität (meist):




Beobachter $\hat{x}$ schätzen aus Messung $y$

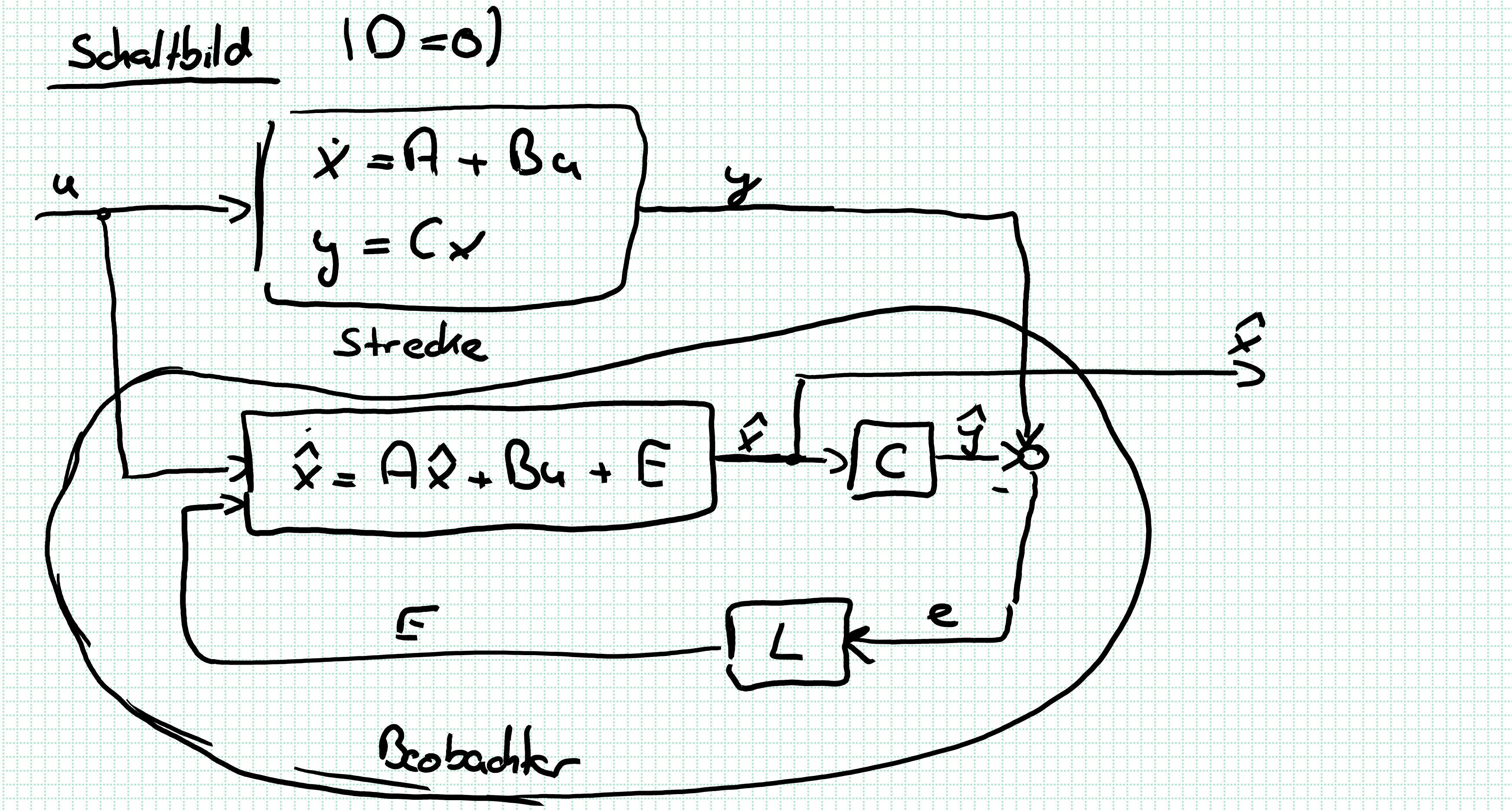
$$\boxed{\hat{x} \approx x}$$

- Einfachster Ansatz zum Beobachter-Entwurf
- „Regler“ der die Abweichungen zwischen Modell und Realität minimiert
- Messergebnisse werden fortlaufend mit Simulationsergebnissen verglichen
- Beobachter „regelt“ diesen Beobachterfehler, sodass dieser im Optimalfall verschwindet

Beobachterfehler $e = \hat{x} - x$

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} e = 0}$$

## Lüneberger Beobachter



## Lüneberger Beobachter

Beobachtermatrix

$\hat{=}$ „K des Reglers"

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \underbrace{L(C\hat{x} - y)}_{\in}$$

$$e = \hat{x} - x \longrightarrow 0$$

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = \underline{\underline{(A + LC)e}}$$

→ Analogie zwischen Beobachter und Regler

## Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

Gegeben sind die folgenden beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $A$ die Systemmatrix und $C$ die Ausgangsmatrix eines Zustandssystems darstellt.

**Aufgaben:** a) Ist das Zustandssystem für $(A, C)$ beobachtbar?

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert $-1$ besitzt.

## Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

a) Ist das Zustandssystem für $(A, C)$ beobachtbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ \\ C \cdot A \\ \\ C A^2 \end{matrix}$$

$\rightarrow$ Rang $3 = n$

$\rightarrow$ vollst. beobachtbar

$R(A^T, C^T) \rightarrow$ „steuerbar"

$\rightarrow$ beobachtbar

**Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung**

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert $-1$ besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ersetzen von $(A, B)$ durch $(A^T, C^T)$ (für alle Zustandsregler Entwurfsverfahren anwendbar)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung**

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert $-1$ besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ob $(A^T, c_1^T)$ oder $(A^T, c_2^T)$ steuerbar ist

$c_1 = (1 \ 0 \ 0)$ ; $c_2 = (0 \ 1 \ 0)$

$$R(A^T, c_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} < n$$

$$R(A^T, c_2^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} < n$$

**Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung**

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert $-1$ besitzt.

$G$: $(A^T + C^T G, c_1^T)$ oder $(A^T + C^T G, c_2^T)$

steuerbar ist

Wählen von $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + C^T G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A^T + C^T G, c_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} = n$$

, somit „steuerbar"

**Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung**

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert $-1$ besitzt.

Beobachter $L$ mit dreifachem $\lambda = -1$

Ackermann-Formel: $\hat{L}^{T} = -(0,0,1)\,R(A^T + C^TG, C_1^T)^{-1}\,p(A^T + C^TG)$

$R(A^T + C^TG, C_1^T)^T \xi = (0,0,1)^T \quad \Rightarrow \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\hat{L}^T = \overbrace{(0,0,1)}^{-\xi^T} \cdot p(A^T + C^TG)$

$p(A^T + C^TG) = (A^T + C^TG + I)^3 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^3 = \ldots = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung**

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert $-1$ besitzt.

$$\hat{L}^T = (0,0,1)\begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix} = (-5, -9, 0)$$

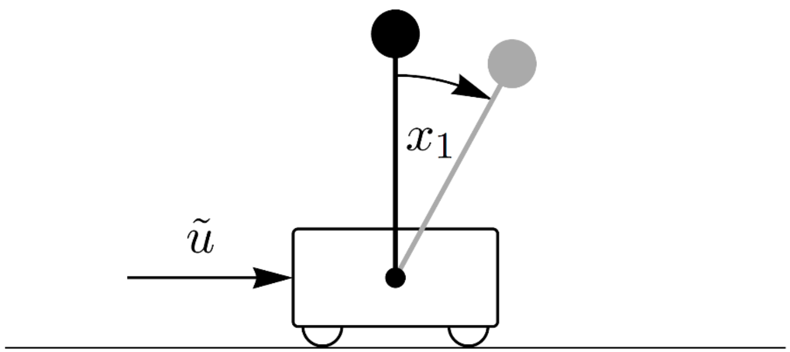
$$L^T = G + e_1 \hat{L}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(-5 \quad -9 \quad 0)$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{L = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

## Aufgabe 2: Inverses Pendel

Betrachtet wird ein Pendel mit der Masse $m$ und Länge $l$, das wie folgt auf einem Wagen montiert ist.




Die Beschleunigung $\tilde{u}$ ist die Stellgröße des Systems, $x_1$ der angedeutete Winkel und $g$ stellt die Erdbeschleunigung dar. Masse des Stabes und Reibung des Wagens wird vernachlässigt. Die Dynamik ist durch folgendes Differentialgleichungssystem gegeben

$$\dot{x}_1 = x_2 \,,$$

$$\dot{x}_2 = \omega^2 sin\, x_1 - \tilde{u} \cdot \frac{\omega^2}{g} cos\, x_1$$

## Aufgabe 2: Inverses Pendel

**Aufgaben**

a) Linearisieren Sie das DGL-System in der Ruhelage $x_1 = x_2, \tilde{u} = 0$ und erstellen daraus ein Zustandssystem in der bekannten Form. Es gilt $x = (x_1, x_2)^T$ und u(t) $= \tilde{u}(t)/g$. Der Winkel $x_1$ stellt die Ausgangsgröße dar.

b) Zeigen Sie, dass $(A, B)$ steuerbar ist und bestimmen eine Zustandsrückführung $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, sodass $A + BK$ einen doppelten Eigenwert bei $-1$ hat.

c) Zeigen Sie, dass $(A, C)$ beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei $-1$ hat.

d) Ist der geschlossene Kreis aus Strecke, Beobachter und Regler stabil?

## Aufgabe 2: Inverses Pendel

a) Linearisieren Sie das DGL-System in der Ruhelage $x_1 = x_2,\, \tilde{u} = 0$ und erstellen daraus ein Zustandssystem in der bekannten Form. Es gilt $x = (x_1, x_2)^T$ und u(t) $= \tilde{u}(t)/g$. Der Winkel $x_1$ stellt die Ausgangsgröße dar.

$$\dot{x}_1 = x_2\,,$$

$$\dot{x}_2 = \omega^2 \sin x_1 - \tilde{u} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cos x_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2: Inverses Pendel**

b) Zeigen Sie, dass $(A, B)$ steuerbar ist und bestimmen eine Zustandsrückführung $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, sodass $A + BK$ einen doppelten Eigenwert bei $-1$ hat.

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang } 2$$

$$K = -(0,1)\, R(A,B)^{-1} \underbrace{p(A)}_{\substack{(A+I)^2 \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}^2}} = (0,1)\, \frac{1}{\omega^4} \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$= \ldots = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1+\omega^2}{\omega^2} & \frac{2}{\omega^2} \end{pmatrix}}}$$

**Aufgabe 2: Inverses Pendel**

c) Zeigen Sie, dass $(A, C)$ beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei $-1$ hat.

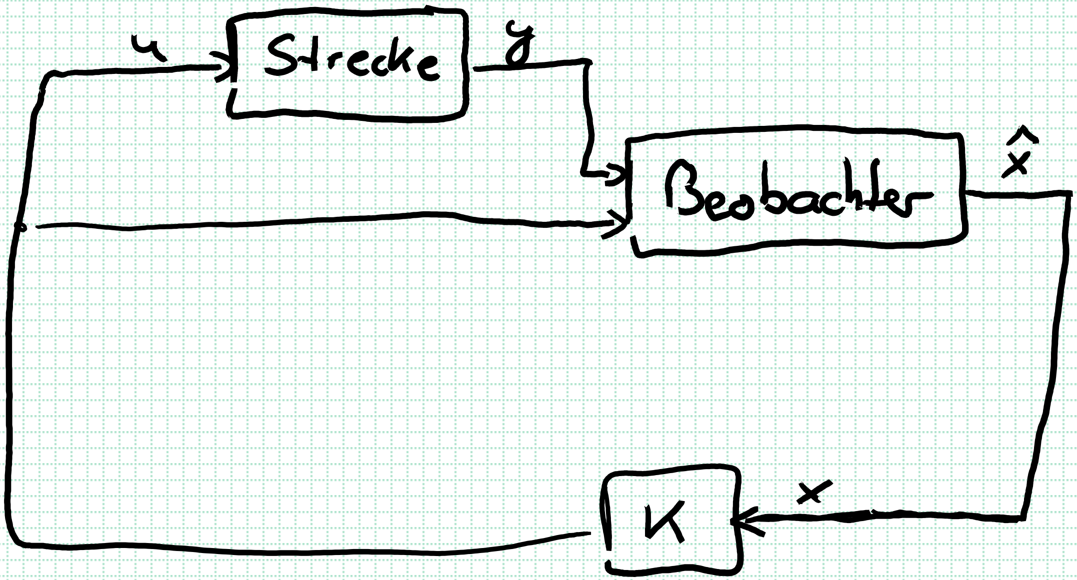
$$R(A^T, C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} = 2$$

$$L^T = -(0, 1)\, R(A^T, C^T)^{-1} (A^T + I)^2 = \dots = \left(-2 \quad -(\omega^2 + 1)\right)$$

$$\underline{\underline{L = \begin{pmatrix} -2 \\ -(\omega^2 + 1) \end{pmatrix}}} \longrightarrow \hat{x} \text{ beobachten}$$

**Aufgabe 2: Inverses Pendel**

c) Zeigen Sie, dass $(A, C)$ beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei $-1$ hat.




Seperationsprinzip

- Beobachter stabil ✓
- Regler stabil ✓

=> Schaltung aus Beobachter und Regler auch stabil