6. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

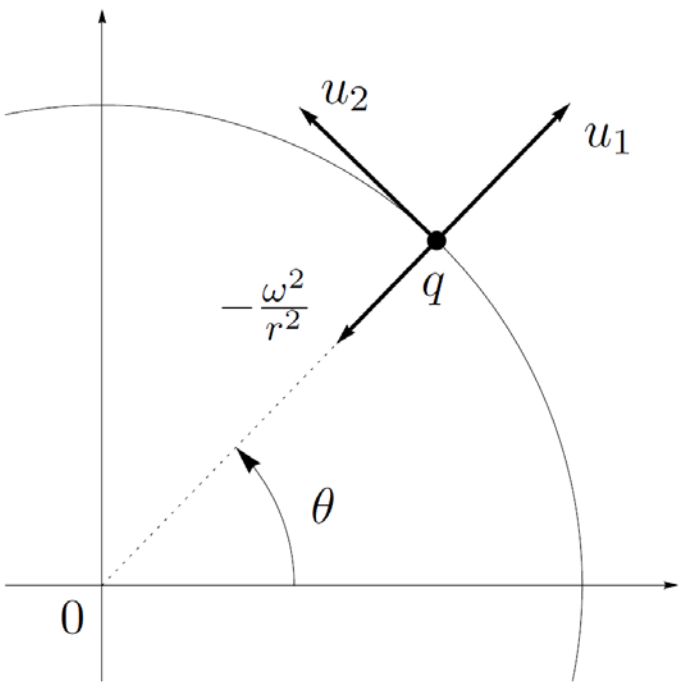
Steuerbarkeitsanalyse

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe: Analyse eines Satelliten-Modells

Betrachtet wird ein Modell eines Satelliten als Punktmasse mit $m = 1\text{kg}$



Bewegungsgleichungen des Satelliten:
(Newton‘sche Gesetze - Polarkoordinaten)

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\omega^2}{r^2} + u_1$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{u_2}{r}$$

a) Leiten Sie ein Differentialgleichungssystem für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ her, wobei $x_1 = r - 1$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta - \omega t$ und $x_4 = \dot{\theta} - \omega$.

$$x_1 = r - 1$$

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_2 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{r}$$

$$x_3 = \theta - \omega t$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta} - \omega = x_4 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_4 = \ddot{\theta}$$

$$r = x_1 + 1$$

$$\dot{r} = \dot{x}_1$$

$$\ddot{r} = \dot{x}_2$$

$$\theta = x_3 + \omega t$$

$$\dot{\theta} = x_4 + \omega$$

$$\ddot{\theta} = \dot{x}_4$$

a) Leiten Sie ein Differentialgleichungssystem für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ her, wobei $x_1 = r - 1$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta - \omega t$ und $x_4 = \dot{\theta} - \omega$.

$$\overbrace{\dot{x}_2}^{\ddot{r}} = \overbrace{(x_1+1)}^{r} \cdot \overbrace{(x_4+\omega)^2}^{\dot{\theta}^2} - \underbrace{\frac{\omega^2}{(x_1+1)^2}}_{r^2} + u_1$$

$$\overbrace{\dot{x}_4}^{\ddot{\theta}} = -\frac{2\overbrace{x_2}^{\dot{r}}\overbrace{(x_4+\omega)}^{\dot{\theta}}}{\underbrace{x_1+1}_{r}} + \frac{u_2}{\underbrace{x_1+1}_{r}}$$

$$\dot{x} = f(x, u)$$

<u>DGL-System</u> (nichtlin.)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ (x_1+1)(x_4+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{(x_1+1)^2} + u_1 \\ x_4 \\ -\frac{2x_2(x_4+\omega)}{x_1+1} + \frac{u_2}{x_1+1} \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0,0,0,0)^T$ und $u^0 = (0,0)^T$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ (0+1)\cdot(0+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{(0+1)^2} + 0 \\ 0 \\ -\frac{2\cdot 0(0+\omega)}{0+1} + \frac{0}{0+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0,0,0,0)^T$ und $u^0 = (0,0)^T$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0, u^0) \quad ; \quad B_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x^0, u^0)$$

$$A_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0, u^0) = 1$$

$$A_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0, u^0) = \dots = 3\omega^2$$

$$A_{2,4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(x^0, u^0) = \dots = 2\omega$$

$$A_{3,4} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4}(x^0, u^0) = 1$$

$$A_{4,2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(x^0, u^0) = \dots = -2\omega$$

$$B_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(x^0, u^0) = 1$$

$$B_{4,2} = \frac{\partial f_4}{\partial u_2}(x^0, u^0) = 1$$

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0,0,0,0)^T$ und $u^0 = (0,0)^T$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u}}$$

c) Zeigen Sie für das lineare System aus b), dass es für einen beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^4$ ein Eingangssignal existiert, dass für ein $t \geq 0$ das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u) = (0,0,0,0)^T$ erreicht werden kann.

$$R(A,B) = [B,\ A\cdot B,\ A^2\cdot B,\ A^3 B]$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & \end{array}\right) \longrightarrow \text{Rang} = 4$$

$$\underbrace{}_{B} \quad \underbrace{}_{A\cdot B}$$

↳ vollst. steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verlust der tangentialen Steuerung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nullspalte

$\hookrightarrow \lambda = 0$

Hautus-Krit.

$$\operatorname{rang}(\underbrace{0}_{\lambda} \cdot I - A, B_r) = \operatorname{rang}(-A, B_r) = \operatorname{rang}(A, B_r)$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < 4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 2\omega & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ nicht vollst. steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verlust der radialen Steuerung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 B_t = A(A \cdot B_t)$$

$$A^3 B_t = A(A^2 \cdot B_t)$$

$$R(A, B_t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{B_t} \quad \underbrace{}_{A \cdot B_t} \quad \underbrace{}_{A^2 \cdot B_t} \quad \underbrace{}_{A^3 \cdot B_t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang} = 4$$

↳ vollst. steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_{rt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

u_1 wirkt auf zwei DGL's

u_2 wirkungslos

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 2\omega & \cancel{0} & -\omega^2 & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{0} & 2\omega & \cancel{0} & -\omega^2 & \cancel{0} & -2\omega^3 & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & -2\omega & \cancel{0} & -4\omega^2 & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{0} & -2\omega & \cancel{0} & -4\omega^2 & \cancel{0} & 2\omega^3 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\omega & -\omega^2 \\ 1 & 2\omega & -\omega^2 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & -2\omega & -4\omega^2 \\ 1 & -2\omega & -4\omega^2 & 2\omega^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} = 4$$

↳ vollst. steuerbar

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

System teilweise steuerbar

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{steuerbar} \\ \rightarrow \text{nicht steuerbar} \end{matrix}$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11} \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12} \tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 u$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22} \tilde{x}_2 \rightarrow \text{autonomes System}$$

$$\boxed{\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22} \tilde{x}_2} \xrightarrow{\tilde{x}_2 =: \text{Störung}} \boxed{\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11} \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12} \tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 u}$$

$$\xrightarrow{u}$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

Basis von $R(A, B_r)$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A, B_r) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -\omega^2 & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -\omega^2 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -2\omega & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & -2\omega & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 2\omega^3 & \cancel{0} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} B_r & A \cdot B_r & A^2 B_r & A^3 \cdot B_r \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

lin. abhängig

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix}$$

$$b_3 = -\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Basis von } R(A, B)$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine <u>invertierbare</u> Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\omega}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

„sinnvolle" Ergänzung

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \quad 0 \quad 0}^{\tilde{A}_{11}} & & & \overbrace{\frac{3\omega}{2}}^{\tilde{A}_{12}} \\ 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \underbrace{0}_{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right) \qquad \tilde{B} = T^{-1} B = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0}^{\tilde{B}_1} \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

$$\tilde{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \underline{\tilde{A}_{1,1}\, x_1 + \tilde{B}_1\, u} \quad \left(+ \tilde{A}_{1,2} \cdot \tilde{x}_2\right)$$