5. Übung zur Vorlesung
„Moderne Methoden der Regelungstechnik“

BIBO-Stabilität, Steuerbarkeit

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Stabilität

- *Bisher:* Stabilität bezogen auf die *A*-Matrix → Zustandsstabilität
- Bezieht sich ausschließlich auf Stabilität bezogen auf die Ruhelage/Anfangslage

- Bezogen auf ein Eingangssignal? → Eingangs-/Ausgangsstabilität
- Wie reagiert ein System auf ein Eingangssignal im Hinblick auf die Stabilität?

- Kann ein System, das Zustandsstabil ist, durch ein Eingangssignal destabilisiert werden?

- E/A-Stabilität wird über den sogenannten BIBO (*bounded input & bounded output)* Begriff definiert
- Antwortet ein System auf ein beschränktes Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal, ist es BIBO-stabil (bzw. Eingangs-/Ausgangsstabil)

BIBO - Stabilität

- BIBO – *bounded input & bounded output*
- Auf jedes beschränkte Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ folgt beschränktes Ausgangssignal $\psi \in \mathbb{R}$
- Aus Vorlesung ist bekannt:
    - Wenn:

$$\lim_{t\to\infty} C \cdot e^{At} \cdot B = 0$$

    - Dann ist das Zustandssystem BIBO-stabil

- *Frage*: Ist ein System auch dann BIBO-stabil, wenn es zustandsstabil ist?

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

Gegeben ist das folgende Zustandssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe:</u> Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem BIBO-stabil ist.

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

e^{At} mit $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda+4 & 0 \\ -3 & \lambda+2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$= \underline{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1)} \overset{!}{=} 0$$

$\lambda_1 = -4$

$\lambda_2 = -2$

$\lambda_3 = -1$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$T = \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ -2e^{-4t} + 3e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ e^{-4t} - e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}}$$

$$\lim_{t \to \infty} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot e^{At} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} = \lim_{t \to \infty} \left(-e^{-4t} + e^{-2t}\right) = 0$$

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix}e^{-4t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}}_{B}$$

Zustandsstabil $\Rightarrow$ BIBO-Stabilität, wenn D, C = konst.

$\Leftarrow$ gilt nicht

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

Gegeben sind die beiden folgenden ähnlichen Zustandssysteme

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x$$

und

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \widetilde{B} \cdot u$$
$$y = \tilde{C} \cdot \tilde{x}$$

Wobei $\tilde{x} = T \cdot x$ gilt und die jeweiligen Matrizen den jeweils transformierten Matrizen des Zustandssystems entsprechen.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Zustandssystem in x genau dann BIBO-stabil ist, wenn das Zustandssystem in $\tilde{x}$ BIBO-stabil ist.

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = 0$$

$$x = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\lim_{t \to \infty} C e^{At} B = 0$$

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

$$\tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} \cdot \underbrace{e^{TAT^{-1} \cdot t}}_{e^{\tilde{A}t}} \cdot \underbrace{TB}_{\tilde{B}}$$

$$= C T^{-1} \cdot T e^{At} T^{-1} \cdot T B$$

$$= C e^{At} B$$

Zustandstransformation $\tilde{x} = T \cdot x$ beeinflusst die Stabilität
<u>nicht</u>

Steuerbarkeit eines Zustandssystems

- Ein System ist steuerbar, wenn für alle x_0, x_1 eine Zeit $t \geq 0$ existiert, in der das System mit einem **zulässigen** Eingangssignal $u(t)$ von Zustand x_0 in Zustand x_1 überführt werden kann.

- Zwei verschiedene Kriterien aus Vorlesung bekannt
    - <u>Kalman</u>: Die Steuerbarkeitsmatrix $R(A,B) = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ besitzt vollen Rang, also $rang(R) = n$
    - <u>Hautus</u>: Für alle Eigenwerte λ_i von A besitzt die Matrix $[(\lambda_i I - A), B]$ vollen Rang, also $rang([(\lambda_i I - A), B]) = n$

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Steuerbarkeit hängt von A & B ab

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem steuerbar ist.

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kalman

$$R(A,B) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $R(A,B) = 2$ $\longrightarrow$ vollst. steuerbar

autonomes System $\longrightarrow$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$R(A,B) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots \right]$$

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hautus

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

$$[\lambda_i I - A, B] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang} = 2 = n$$

$\rightarrow$ vollständig steuerbar