

---

# **5. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“**

**BIBO-Stabilität, Steuerbarkeit**

**Felix Goßmann M.Sc.**

Institut für Steuer- und Regelungstechnik  
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik  
Universität der Bundeswehr München

## Stabilität

- *Bisher:* Stabilität bezogen auf die **A-Matrix** → **Zustandsstabilität**
- Bezieht sich ausschließlich auf Stabilität bezogen auf die **Ruhelage/Anfangslage**
- Bezogen auf ein **Eingangssignal**? → **Eingangs-/Ausgangsstabilität**
- Wie reagiert ein **System auf ein** Eingangssignal im Hinblick auf die **Stabilität**?
- Kann ein System, das **Zustandsstabil** ist, durch ein **Eingangssignal destabilisiert** werden?
- E/A-Stabilität wird über den sogenannten **BIBO** (*bounded input & bounded output*) **Begriff** definiert
- Antwortet ein System auf ein **beschränktes Eingangssignal** mit einem **beschränkten Ausgangssignal**, ist es BIBO-stabil (bzw. Eingangs-/Ausgangsstabil)

## BIBO - Stabilität

- BIBO – *bounded input & bounded output*
- Auf jedes beschränkte Eingangssignal  $u(t) \in \mathbb{R}$  folgt beschränktes Ausgangssignal  $\psi \in \mathbb{R}$
- Aus Vorlesung ist bekannt:

- Wenn:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C \cdot e^{At} \cdot B = 0$$

- Dann ist das Zustandssystem BIBO-stabil
- *Frage:* Ist ein System auch dann BIBO-stabil, wenn es zustandsstabil ist?

## Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

Gegeben ist das folgende Zustandssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x\end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= (1 \quad 1 \quad 0)\end{aligned}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem BIBO-stabil ist.

## Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$e^{At} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -1$$

$$= \underline{\underline{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1)}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$T = \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$v_1$      $v_2$      $v_3$

$$T^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$e^{At} = \left( \begin{array}{cc} e^{-4t} & 0 \\ -2e^{-4t} + 3e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-4t} - e^{-t} & 0 \end{array} \right)$$

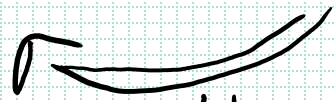
$0$      $0$   
 $-e^{-2t} + e^{-t}$   
 $e^{-t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{(1 \ 1 \ 0)}_C \cdot e^{\downarrow At} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_B = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-4t} + e^{-2t}) = 0$$

## Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{(1 \ 1 \ 0)}_C \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}}_{e^{Dt}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_B$$

Zustandsstabil  $\Rightarrow$  BIBO-Stabilität, wenn  $D, C = \text{konst.}$

  
gilt nicht

## Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

Gegeben sind die beiden folgenden ähnlichen Zustandssysteme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{B} \cdot u \\ y &= \tilde{C} \cdot \tilde{x}\end{aligned}$$

Wobei  $\tilde{x} = T \cdot x$  gilt und die jeweiligen Matrizen den jeweils transformierten Matrizen des Zustandssystems entsprechen.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Zustandssystem in  $x$  genau dann BIBO-stabil ist, wenn das Zustandssystem in  $\tilde{x}$  BIBO-stabil ist.



## Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = 0$$

$$\begin{aligned}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C e^{At} B = 0$$

## Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

$$\begin{aligned}
 \tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \tilde{B} &= \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} \cdot \underbrace{e^{TAT^{-1}t}}_{e^{At}} \cdot \underbrace{T B}_{\tilde{B}} \\
 &= C \underbrace{T^{-1}} \cdot T e^{At} \cdot \underbrace{T^{-1}} \cdot T B \\
 &= C e^{At} B
 \end{aligned}$$

Zustandstransformation  $\tilde{x} = T \cdot x$  beeinflusst die Stabilität nicht

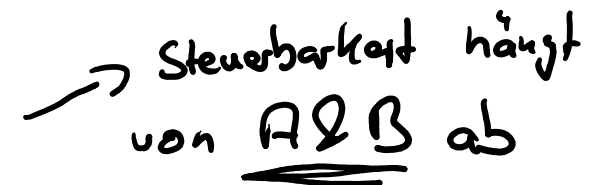
## Steuerbarkeit eines Zustandssystems

- Ein System **ist steuerbar**, wenn für alle  $x_0, x_1$  eine Zeit  $t \geq 0$  existiert, in der das System mit einem **zulässigen** Eingangssignal  $u(t)$  von Zustand  $x_0$  in Zustand  $x_1$  überführt werden kann.
- Zwei verschiedene Kriterien aus Vorlesung bekannt
  - Kalman: Die Steuerbarkeitsmatrix  $R(A, B) = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  besitzt vollen Rang, also  $\text{rang}(R) = n$
  - Hautus: Für alle **Eigenwerte**  $\lambda_i$  von  $A$  besitzt die Matrix  $[(\lambda_i I - A), B]$  vollen Rang, also  $\text{rang}([( \lambda_i I - A ), B]) = n$

### Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

Gegeben ist das Zustandssystem  $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$  mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe: Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem steuerbar ist.

### Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

Kalman  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$R(A, B) = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } R(A, B) = 2 \rightarrow$  vollst. steuerbar

---

autonomes System  $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$R(A, B) = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right]$$

### Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

Hautus

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

$$\begin{aligned} [\lambda I - A, B] &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang} = 2 = n \end{aligned}$$

→ vollständig steuerbar