2. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

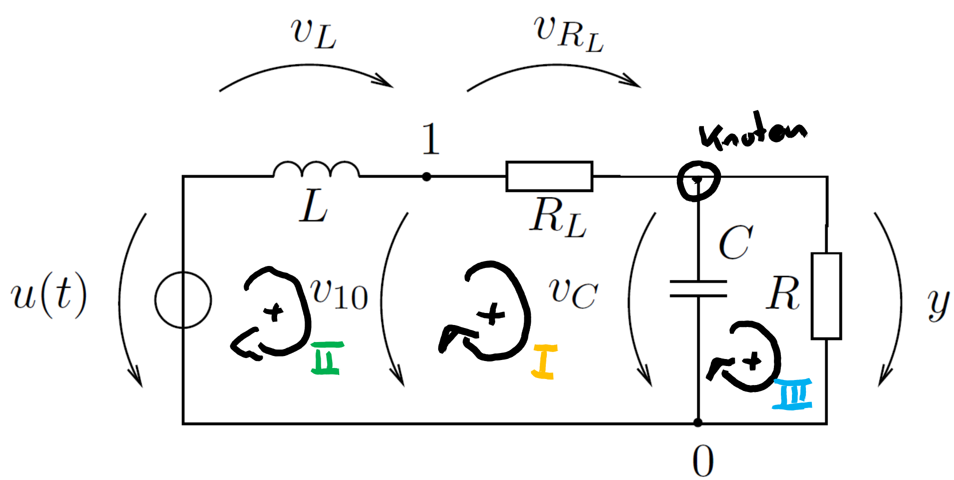
Zustandstransformation und Berechnung von Zustandssignalen

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Zustandstransformation

Gegeben ist das folgende elektrische Netzwerk:



Aufgaben

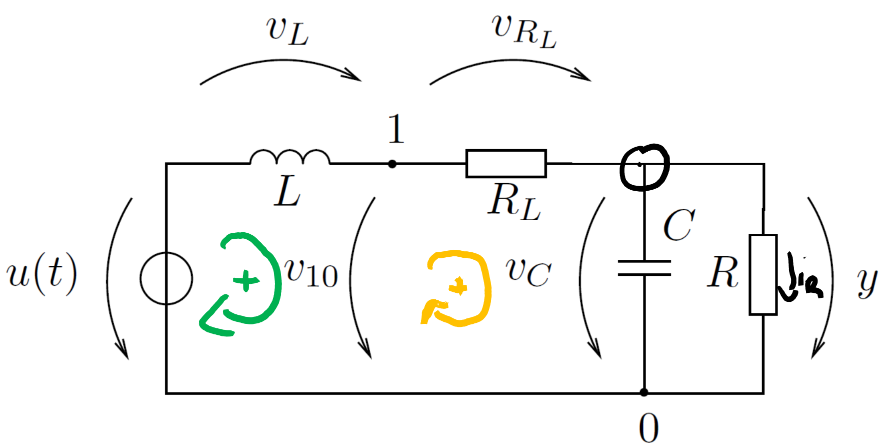
a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, sodass für $\tilde{x} = (\phi, q)^T = Tx$ gilt

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf



I: $v_{10} = v_{R_L} + v_C = R_L \cdot i_L + v_C$

$\Rightarrow \dot{v}_{10} = R_L \frac{d}{dt} i_L + \frac{d}{dt} v_C$

Bauteilgl.: $v_L = L \frac{d}{dt} i_L \Rightarrow \frac{v_L}{L} = \frac{d}{dt} i_L$

$\dot{v}_{10} = R_L \cdot \frac{v_L}{L} + \frac{d}{dt} v_C$

II: $v_L = u - v_{10}$ Knoten: $i_C = i_L - i_R$

Bauteilgl. $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} v_C \Rightarrow \frac{d}{dt} v_C = \frac{i_C}{C}$

$\dot{v}_{10} = \frac{R_L}{L}(u - v_{10}) + \frac{i_C}{C}$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

Masche II

$$\frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}(i_L - i_R) = \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{v_C}{R}\right)$$

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v_C}{R}$$

$$i_L = i_{R_L} = \frac{v_{R_L}}{R_L}$$

$$\Rightarrow \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}\left(\frac{v_{R_L}}{R_L} - \frac{v_C}{R}\right)$$

$$v_{R_L} = v_{10} - v_C$$

$$\Rightarrow \dot{v}_{10} = \left(\frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L}\right) v_{10} + \left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right) v_C + \frac{R_L}{L} u$$

$$\dot{v}_C = \frac{d}{dt} v_C = \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}\left(\frac{v_{10} - v_C}{R_L} - \frac{v_C}{R}\right)$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

$$\dot{v}_C = \left(\frac{1}{R_L C}\right) v_{10} + \left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right) v_C \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{10} \\ \dot{v}_C \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{R_L C} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{R_L}{L} \\ 0 \end{pmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix} + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, sodass für $\tilde{x} = (\phi, q)^T = Tx$ gilt

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix}$$

ϕ: Fluss der Induktivität $\quad \phi = L \cdot i_L$

q: Ladung des Kondensators $\quad q = C \cdot v_C$

$$i_L = \frac{v_{10} - v_C}{R_L} \longrightarrow \phi = \frac{L}{R_L}(v_{10} - v_C)$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

T: Transformatrix

Aufgabe 1: Zustandstransformation

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, sodass für $\tilde{x} = (\phi, q)^T = Tx$ gilt

$$\underline{\underline{\tilde{x} = T \cdot x}} \longrightarrow \dot{\tilde{x}} = T \cdot \underline{\dot{x}}$$

$$\hookrightarrow \dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{\tilde{x}} = TAx + TBu$$

$$\underline{\underline{x = T^{-1} \tilde{x}}}$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \underbrace{TAT^{-1}}_{= \tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{TBu}_{\tilde{B}}$$

$$y = Cx + \cancel{Du}^{\,0} = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} \tilde{x}$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

$$\phi = \frac{L}{R_L}(v_{10} - v_C) \quad ; \quad q = C \cdot v_C$$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{L}{R_L} & -\frac{L}{R_L} \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

$$\tilde{A} = T A T^{-1} \qquad T^{-1} = \frac{R_L}{LC}\begin{pmatrix} C & \frac{L}{R_L} \\ 0 & \frac{L}{R_L} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{L}{R_L} & -\frac{L}{R_L} \\ 0 & C \end{pmatrix} A \cdot \frac{R_L}{LC}\begin{pmatrix} C & \frac{L}{R_L} \\ 0 & \frac{L}{R_L} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = C T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Es wird ein harmonischer Oszillator (mit Anregung) betrachtet, dessen Dynamik durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u(t)\,,$$

wobei $\gamma \geq 0$ und $\omega > 0$ gilt.

<u>Aufgabe</u>

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0{,}0)^T \; \forall\, t \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ homogene Lösung

b) $u(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \ \forall\, t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t, x_0, u(t) = 0) = \underbrace{e^{At}} x_0$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

J: Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \ \forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\det(\lambda I - A) \longrightarrow \det\begin{pmatrix} \lambda+\gamma & -\omega \\ \omega & \lambda+\gamma \end{pmatrix}$$

char.: $(\lambda+\gamma)^2 + \omega^2 \overset{!}{=} 0$ $\qquad \lambda_1 = -\gamma - i\omega \ ; \ \lambda_2 = -\gamma + i\omega$

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - i\omega & 0 \\ 0 & -\gamma + i\omega \end{pmatrix}$$

$(\lambda_j I - A)x = 0 \qquad j = \{1, 2\}$

$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{-\gamma t}}{2i} \begin{pmatrix} i e^{i\omega t} + i e^{-i\omega t} & e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} + e^{i\omega t} & i e^{i\omega t} + i e^{-i\omega t} \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

$$e^{At} = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t, x_0, u(t) = 0) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

homogene Lsg.

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\tilde{u}(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} -i e^{2i\omega t} \\ e^{2i\omega t} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Re} \tilde{u}(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) \\ \cos(2\omega t) \end{pmatrix} = u(t)$$

$$\varphi(t, x_0, u) = \varphi(t, x_0, \operatorname{Re}\{\tilde{u}(t)\}) = \operatorname{Re}\{\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t))\}$$

$$\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \tilde{u}(s)\, ds$$

$$= \underbrace{e^{At}} x_0 + \underbrace{e^{At}} \underbrace{\int_0^t e^{-As} \tilde{u}(s)\, ds}$$

aus a)

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$e^{-As}\,\tilde{u}(s) = T\,e^{-Js}\,T^{-1}\cdot\tilde{u}(s)$$

$$= T\begin{pmatrix} e^{\gamma s+i\omega s} & 0 \\ 0 & e^{\gamma s-i\omega s}\end{pmatrix}T^{-1}\cdot e^{-\gamma s}\begin{pmatrix} -i\,e^{2i\omega s} \\ e^{2i\omega s}\end{pmatrix}$$

$$\approx T\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\omega s}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}) = e^{At} x_0 + T \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \cancel{T^{-1}} \cdot \cancel{T} \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\omega s} \end{pmatrix} ds$$

$$= e^{At} x_0 + T \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega t} - 1\right) \end{pmatrix}$$

$$= e^{At} x_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\left(e^{-\gamma t + 2i\omega t} - e^{-\gamma t + i\omega t}\right) \\ \frac{1}{i\omega}\left(e^{-\gamma t + 2i\omega t} - e^{-\gamma t + i\omega t}\right) \end{pmatrix}}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\varphi(t, x_0, u) = \mathrm{Re}\{\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u})\} = e^{At} x_0 + \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\gamma t} \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0 + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right]$$