1. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

Aufstellen von Zustandsraummodellen, Übertragungsmatrizen

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Dozent:

Felix Goßmann
Gebäude 41 – 2311
felix.gossmann@unibw.de

- Termine nach Vereinbarung
- Fragen zu best. Übungsaufgaben
  - Per E-Mail Termin vereinbaren

- Unterlagen auf der Homepage (Lehrveranstaltungen/Unterlagen/MMR)
  - https://www.unibw.de/lrt15/Institut/lehre/unterlagen/MMR

Geplanter Ablauf

KW	Mo	Die	Bemerkungen
40	-	V	
41	Ü	V	
42	Ü	V	
43	Ü	V	
44	Ü	V	
45	Ü	V	
46	-	-	
47	Ü	V	
48	V	Ü	
49	Ü	V	
50	Ü	(Ü)	

– Zeiten unter Vorbehalt

– Kurzfristige Änderungen

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

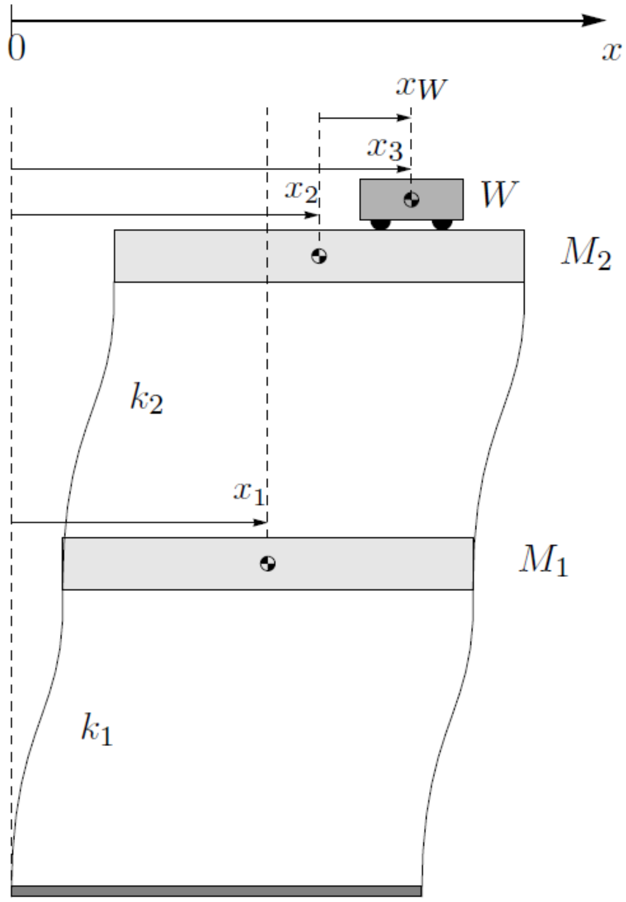
u kein Skalar, y kein Skalar

MIMO → A, B, C, D Matrizen

→ konstant

→ linear

Aufgabe 1: Aufstellen eines Zustandsraummodelles



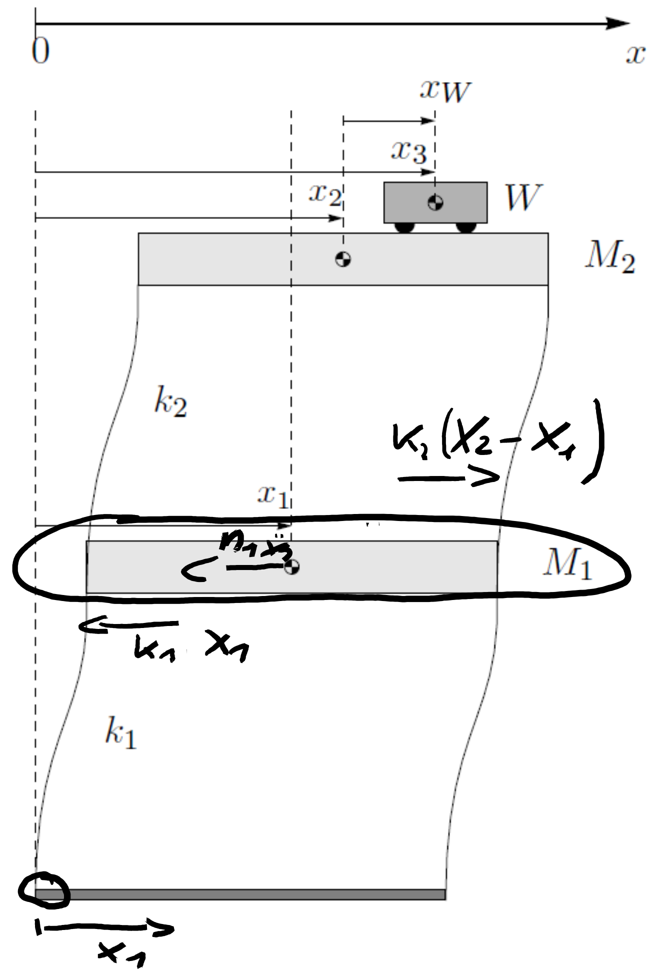
Aufgabe:

Bestimmen Sie das 6-dimensionale Zustandsraummodell des dargestellten Problems

- Eingangssignal:
  - Beschleunigung von W relativ zur Masse M_2
- Zustandsgrößen:
  - Positionen x und deren zeitliche Ableitungen $\dot{x}$

Aufgabe 1: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

	Betrag	Richtung
Masse 1	$M_1 \cdot \ddot{x}_1$	$\leftarrow$
	$k_1 \cdot x_1$	$\leftarrow$
	$k_2(x_2 - x_1)$	$\rightarrow$
Masse 2	$M_2\ \ddot{x}_2$	$\leftarrow$
	$k_2(x_2 - x_1)$	$\leftarrow$
	$M_w(\ddot{x}_2 + u)$	$\leftarrow$
Wagen	$M_w\ \ddot{x}_3$	$\leftarrow$
	$M_w(\ddot{x}_2 + u)$	$\rightarrow$



Aufgabe 1: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

Masse 1	$M_1 \cdot \ddot{x}_1$ $k_1 \cdot x_1$ $k_2 \cdot (x_2 - x_1)$	$\leftarrow$ $\leftarrow$ $\rightarrow$
Masse 2	$M_2 \cdot \ddot{x}_2$ $k_2(x_2 - x_1)$ $M_W \cdot (\ddot{x}_2 + u)$	$\leftarrow$ $\leftarrow$ $\leftarrow$
Wagen	$M_W \cdot \ddot{x}_3$ $M_W(\ddot{x}_2 + u)$	$\leftarrow$ $\rightarrow$

$$-M_1 \ddot{x}_1 - k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$-M_2 \ddot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - M_W(\ddot{x}_2 + u) = 0$$

$$-M_W \ddot{x}_3 + M_W(\ddot{x}_2 + u) = 0$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Aufgabe 1: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}x_2$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_2}{m_2+m_w}x_1 - \frac{k_2}{m_2+m_w}x_2 - \frac{m_w}{m_2+m_w}u$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{k_2}{m_2+m_w}x_2 + \frac{k_2}{m_2+m_w}x_1 + \frac{m_2}{m_2+m_w}u$$

$$x_4 = \dot{x}_1$$

$$\rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{x}_1$$

$$x_5 = \dot{x}_2$$

$$\rightarrow \dot{x}_5 = \ddot{x}_2$$

$$x_6 = \dot{x}_3$$

$$\rightarrow \dot{x}_6 = \ddot{x}_3$$

$$\rightarrow A x + B u = \dot{x}$$

Aufgabe 1: Aufstellen eines Zustandsraummodelles

$$\begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \\ \dot x_3 \\ \dot x_4 \\ \dot x_5 \\ \dot x_6 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2+m_w} & -\frac{k_2}{m_2+m_w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2+m_w} & -\frac{k_2}{m_2+m_w} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{m_w}{m_2+m_w} \\ \frac{m_2}{m_2+m_w} \end{pmatrix}}^{=B} \cdot u$$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

Gegeben sind die vier folgenden Übertragungsfunktionen

1. $H_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_1(s) = \frac{1}{s^2}$
2. $H_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_2(s) = \frac{(s+1)^2}{(s-1)^2}$
3. $H_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_3(s) = \frac{\omega^2}{s^2+2D\omega s+\omega^2}, \quad \omega, D > 0$
4. $H_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_4(s) = \frac{s+1}{s^2+2D\omega s+\omega^2}, \quad \omega, D > 0$

a) Bestimmen Sie aus den Übertragungsfunktionen 1. - 3. jeweils das zugehörige Zustandsraummodell

b) Betrachten Sie das System $Y(s) = H_1(s) \cdot U_1(s) + H_3(s) \cdot U_2(s)$ und bestimmen dessen Zustandsraummodell

c) Betrachten Sie das System $Y(s) = H_3(s) \cdot U_1(s) + H_4(s) \cdot U_2(s)$ und bestimmen dessen Zustandsraummodell

d) Berechnen Sie das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u)$ von System 1 für das Eingangssignal $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

Aus der 2. Vorlesung (Vorgriff):

- Die allgemein propere Übertragungsfunktion $H(s)$ lässt sich immer in folgende Summe zerlegen:

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_n}{a_n} + \boxed{\underbrace{\frac{\tilde{b}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{s^n + \tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}}_{\widetilde{H}(s)}}$$

- Mit den Konstanten: $\tilde{a}_k = \frac{a_k}{a_n}$, $b_k = \frac{b_k - b_n \tilde{a}_k}{a_n}$, $k < n$

- Die Übertragungsfunktion $\widetilde{H}(s)$ wird dabei als streng proper bezeichnet

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

Aus der Vorlesung 2 ist außerdem bekannt:

- Eine streng propere Übertragungsfunktion $\tilde{H}(s)$ kann unmittelbar in ein Zustandsraummodell (genauer: in dessen Beobachtungsnormalform – RT) überführt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\tilde{a}_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\tilde{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = (0)$$

- Im Fall $b_n = 0$ gilt $H(s) = \tilde{H}(s)$, sodass das System streng proper ist und die Beobachtungsnormalform dem Zustandsraummodell entspricht
- Im Fall $b_n \neq 0$ ändert sich gegenüber der Beobachtungsnormalform nur: $D = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

a1) $H_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_1(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\longrightarrow \boxed{1/s} \longrightarrow \boxed{1/s} \longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

a2) $H_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_2(s) = \frac{(s+1)^2}{(s-1)^2} = \frac{s^2+2s+1}{s^2-2s+1}$

$$H_2(s) = \underbrace{1}_{=D} + \frac{4s}{s^2-2s+1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = C \cdot x + \underline{D \cdot u}$$

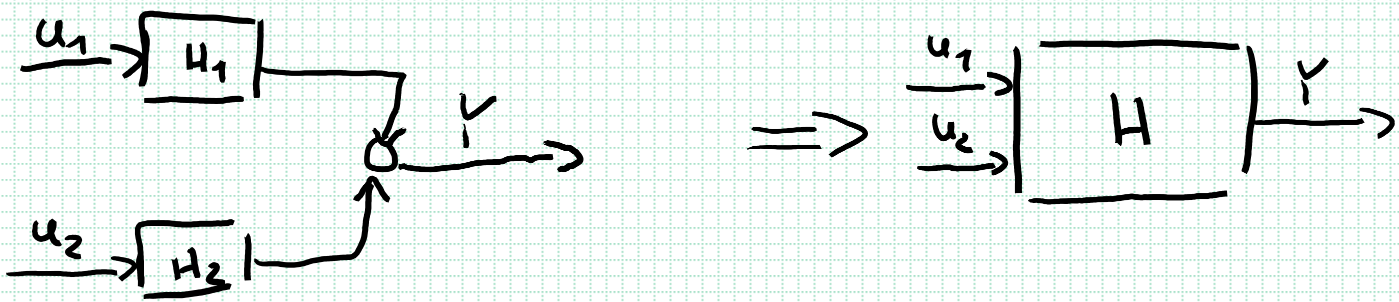
Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

a3) $H_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H_3(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}, \quad \omega, D > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & -2D\omega \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

b) Betrachten Sie das System $Y(s) = H_1(s) \cdot U_1(s) + H_3(s) \cdot U_2(s)$ und bestimmen dessen Zustandsraummodell



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

b) Betrachten Sie das System $Y(s) = H_1(s) \cdot U_1(s) + H_3(s) \cdot U_2(s)$ und bestimmen dessen Zustandsraummodell

A_1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 1 & -2D\omega \end{pmatrix}$$

A_2

B_1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B_2

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

c) Betrachten Sie das System $Y(s) = H_3(s) \cdot U_1(s) + H_4(s) \cdot U_2(s)$ und bestimmen dessen Zustandsraummodell

$$H_4 = \frac{s+1}{s^2+2D\omega s+\omega^2} \qquad H_3 = \frac{\omega^2}{s^2+2D\omega s+\omega^2}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)\,U_1(s) + \omega^2\,U_2(s)}{s^2+2D\omega s+\omega^2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & -2D\omega \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

d) Berechnen Sie das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u)$ von System 1 für das Eingangssignal $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$

<u>Satz 3</u>

$$\tilde{u}(t) = e^{i\omega t} \cdot u_0$$

$$\varphi(t, x_0, \tilde{u}) = \underline{H(i\omega)} \cdot \tilde{u}(t)$$

$$u(t) = \mathrm{Im}\{\tilde{u}(t)\} \longrightarrow \varphi/\psi\,(t, x_0, u) = \mathrm{Im}\{\tilde{\varphi}/\tilde{\psi}\,(t, x_0, \tilde{u})\}$$

$$\boxed{H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D}$$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

d) Berechnen Sie das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u)$ von System 1 für das Eingangssignal $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$

System I $\rightarrow$ $H_1(s) = \frac{1}{s^2}$

$\tilde{u}(t) = e^{i\omega t} \cdot u_0$
$= \cos(\omega t) \cdot u_0 +$
$i \cdot \sin(\omega t) \cdot u_0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H(i\omega) = (i\omega I - A)^{-1} \cdot B$

$= \left[\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \cdot \frac{1}{\omega} \\ -\frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Zustandsraum-Modelle

d) Berechnen Sie das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u)$ von System 1 für das Eingangssignal $u(t) = \underline{u_0 \cdot \sin(\omega t)}$

$$\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t)) = \underbrace{\begin{pmatrix} -i \cdot \frac{1}{\omega} \\ -\frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix}}_{H(i\omega)} \cdot \underbrace{\left[\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)\right] u_0}_{\tilde{u}(t)}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} - i \cdot \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \\ -\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} - i \cdot \underbrace{\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}} \end{pmatrix} u_0$$

$$\Rightarrow \varphi = \mathrm{Im}\{\tilde{\varphi}\} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \\ -\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} \end{pmatrix} u_0$$