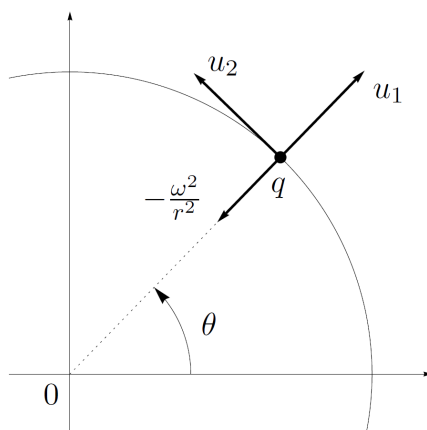


## 6. Übung, 19. November 2018

**Thema:** Steuerbarkeitsanalyse

### Aufgabe 1. Analyse eines Satelliten-Modells

Betrachtet wird ein Modell eines Satelliten in einem Zentralkraftfeld, der seine Position mittels Steerdüsen beeinflussen kann. Der Satellit wird als eine Punktmasse  $m = 1\text{kg}$  mit Ortskoordinate  $q \in \mathbb{R}^2$  betrachtet, auf welche eine radiale Kraft mit Betrag  $\frac{\omega^2}{|q|^2}$  sowie eine radiale bzw. tangentielle Kraft mit Betrag  $u_1$  bzw.  $u_2$  wirkt. Das vollständige Modell ist in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Desweiteren gilt für  $\omega > 0$ ,  $r = |q|$  und  $\theta$  bezeichnet den in der Abbildung dargestellten Winkel. Auf Basis der



Newton'schen Grundgesetze ergeben sich für die Bewegung des Satelliten in der Ebene die folgenden Differentialgleichungen in Polar-Koordinatenform:

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{\omega^2}{r^2} + u_1, \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{u_2}{r}.\end{aligned}$$

## Aufgabe

- a) Leiten Sie mit Hilfe der in der Aufgabenstellung angegebenen Gleichungen ein Differentialgleichungssystem für  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  her, wobei  $x_1 = r - 1$ ,  $x_2 = \dot{r}$ ,  $x_3 = \theta - \omega t$  und  $x_4 = \dot{\theta} - \omega$ .
- b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um  $x^0 = (0, 0, 0, 0)^T$  und  $u^0 = (0, 0)^T$  des in a) erhaltenen Differentialgleichungssystems auf das lineare Zustandssystem  $\dot{x} = Ax + Bu$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

führt.

- c) Zeigen Sie für das in Aufgabe b) hergeleitete lineare System, dass es für einen beliebigen Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^4$  ein Eingangssignal  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert, sodass für ein  $t \geq 0$  das Zustandssignal  $\varphi(t, x_0, u) = (0, 0, 0, 0)^T$  erreicht werden kann.
- d) Gegeben sind die folgenden alternativen Eingangsmatrizen für das linearisierte System aus Aufgabe b):

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{rt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Erklären Sie, was die Wahl einer dieser Eingangsmatrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten Sie jeweils die in Aufgabe c) gestellte Aufgabenstellung.

- e) Falls das Zustandssystem aus Aufgabe b) für eine der in Aufgabe d) betrachteten Eingangsmatrizen nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformations-Matrix  $T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , so dass

$$\tilde{A} := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{1,1} & \tilde{A}_{1,2} \\ 0 & \tilde{A}_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} := T^{-1}B_r = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und  $(\tilde{A}_{1,1}, \tilde{B}_1)$  steuerbar ist.