F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2018

Übung 9 - Lösung

Thema: Beobachtbarkeit und Entwurf von Beobachtern

Aufgabe 1. Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung
Gegeben sind die folgenden beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei A die Systemmatrix und C die Ausgangsmatrix eines Zustandssystems darstellt.

Aufgaben

a) Ist das Zustandssystem für (A, C) beobachtbar?

b) Bestimmen Sie ein Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt

Lösung Aufgabe 1. Δ

a) Es gilt die Beobachtbarkeit des gegebenen Systems zu zeigen, daher wird zunächst die Beobachtbarkeitsmatrix

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{pmatrix}$$

nach Kalman berechnet. Besitzt $O(A, C)$ den Rang n, ist das System vollständig beobachtbar. Unter Verwendung der Aufgabenstellung ergibt sich

$$O(A, C) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{array}\right) .$$

Es zeigt sich, dass die Beobachtbarkeitsmatrix bereits mit den ersten vier Zeilen vollen

Rang besitzt, und somit sich die Berechnung der letzten beiden Zeilen erübrigt. Das Zustandssystem ist daher vollständig beobachtbar.

b) Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, lässt sich ein Beobachter für ein vollständig beobachtbares System analog zum Reglerentwurf mit Eigenwertzuweisung mit Hilfe der Ackermann-Formel entwerfen. Hierzu muss nur das Matrizenpaar (A, B) durch das Paar (A^T, C^T) ersetzt werden. Anschließend erfolg der Beobachterentwurf analog zum Reglerentwurf. Hierzu werden zunächst die Transponierten gebildet

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich offensichtlich also um ein MIMO-Problem, daher wird zunächst die Steuerbarkeit der einzelnen Paare (A^T, c_1^T) und (A^T, c_2^T) untersucht. Mit $c_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ und $c_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ ergibt sich

$$R(A^T, c_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$R(A^T, c_2^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es zeigt sich ziemlich deutlich, dass das System für beide Paare nicht steuerbar ist. Daher muss eine Matrix G bestimmt werden, sodass eines der beiden Paare $(A^T + C^T G, c_1^T)$ oder $(A^T + C^T G, c_2^T)$ steuerbar ist, um mit Hilfe der Ackermann-Formel den Regler $\hat{L} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ zu bestimmen. Ist dies erfolgreich, so ist die Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit $L^T = G + e_k \hat{L}^T$ der gesuchte Beobachter.

Es wird folgende Wahl für G getroffen

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und des Weiteren die Matrix

$$\begin{aligned} A^T + C^T G &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

berechnet. Nun gilt es noch zu prüfen, ob die Steuerbarkeit für eines der beiden genannten Paare gegeben ist. Bei Betrachtung des Paares $(A^T + C^T G, c_1^T)$ zeigt sich

$$R(A^T + C^T G, c_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dass die Steuerbarkeit für das Paar erfüllt ist. Daher wird im folgenden mit dem Vektor c_1^T gearbeitet.

Für das System soll nun ein Beobachter L entworfen werden, der den dreifachen Eigenwert $\lambda = -1$ besitzt. Dies kann, wie bereits erwähnt, analog zum Reglerentwurf mit Eigenwertzuweisen mit Hilfe der Ackermann-Formel

$$\hat{L}^T = -(0,0,1) \cdot R(A^T + C^T G, c_1^T)^{-1} \cdot \mathrm{p}(A^T + C^T G)$$

durchgeführt werden. Hierzu wird zunächst das Gleichungssystem

$$R(A^T + C^T G, c_1^T)^T \xi = (0,0,1)^T$$

gelöst. Das führt zu $\xi^T = (0,0,-1)$, womit sich die gesuchte Beobachtermatrix zu

$$\hat{L}^T = (0,0,1) \cdot \mathrm{p}(A^T + C^T G)$$

ergibt. Es gilt also noch $\mathrm{p}(A^T + C^T G)$ zu bestimmen

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(A^T + C^T G) &= (A^T + C^T G + I)^3 \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^3 \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somit ist alles bestimmt und $\hat{L}^T$ ergibt sich zu

$$\hat{L}^T = (0,0,1) \begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix} = (-5,-9,0).$$

Damit lässt sich nun die transponierte Beobachtermatrix L^T mit

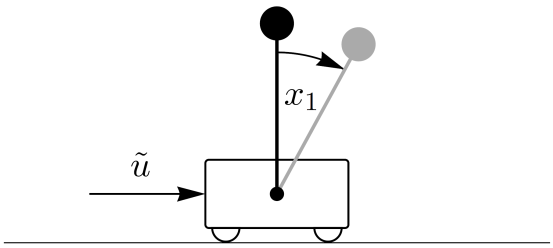
$$
\begin{aligned}
L^T = G + e_1 \hat{L}^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -9 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bestimmen. Somit ergibt sich die gesuchte Beobachtermatrix zu

$$
L = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .
$$

Aufgabe 2. Inverses Pendel

Betrachtet wird ein Pendel mit der Masse m und Länge l, das so wie in der Abbildung dargestellt auf einen Wagen montiert ist. Die Beschleunigung $\tilde{u}$ des Wagens ist eine Stellgröße, x_1 der in der Abbildung angedeutete Winkel und g stellt die Erdbeschleunigung dar. Die Masse des Stabs und die Reibung des Wagens wird vernachlässigt.



Die Dynamik des Pendels ist durch folgendes Differentialgleichungssystem gegeben

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \omega^2 \sin x_1 - \tilde{u} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cos x_1,
\end{aligned}
$$

mit der Konstante $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Aufgaben

a) Linearisieren Sie das Differentialgleichungssystem in der Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$, $\tilde{u} = 0$ und erstellen daraus ein Zustandssystem der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1a}$$

$$y = Cx \tag{1b}$$

mit $x = (x_1, x_2)^T$ und $u(t) = \tilde{u}(t)/g$. Der Winkel x_1 stellt die Ausgangsgröße dar.

b) Zeige Sie, dass (A, B) steuerbar ist und bestimmen eine Zustandsrückführung $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, sodass $A + BK$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

c) Zeige Sie, dass (A, C) beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

d) Ist der geschlossene Kreis aus Strecke, Beobachter und Regler stabil?

Lösung Aufgabe 2.

a) Die Linearisierung in $(0, 0)$ und $\tilde{u} = 0$ ist gegeben durch $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir rechnen

$$\operatorname{rk} R(A, B) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

d.h. (A, B) ist steuerbar. Mit der Ackermannschen Formel ist K gegeben durch

$$K = -(0, 1)R(A, B)^{-1}(A+\mathrm{id})^2 = (0, 1)\frac{1}{\omega^4} \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1+\omega^2}{\omega^2} & \frac{2}{\omega^2} \end{pmatrix}.$$

(ausnahmsweise haben wir $R(A, B)^{-1}$ direkt berechnet)

c) (A, C) ist beobachtbar genau dann, wenn (A^*, C^*) steuerbar ist. Daher rechnen wir

$$\operatorname{rk} R(A^*, C^*) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

und schließen auf die Beobachtbarkeit von (A, C). Mit der Ackermannschen Formel ist L^* gegeben durch

$$L^* = -(0, 1)R(A^*, C^*)^{-1}(A^* + I)^2 = -(0, 1) \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & -(\omega^2 + 1) \end{pmatrix},$$

d.h.

$$L = \begin{pmatrix} -2 \\ -(\omega^2 + 1) \end{pmatrix}.$$

d) Das ist genau das Separationsprinzip, Satz 29 der Vorlesung.