F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2018

Übung 8 - Lösung

Thema: Zustandsrückführung im MIMO-Fall, Beobachtbarkeit

Aufgabe 1. Eigenwertzuweisung im MIMO-Fall
Gegeben ist zum einen das Zustandssystem des Satelliten aus Übung 7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega > 0,$$

sowie das folgende Zustandssystem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Bestimmen Sie für beide Zustandssysteme ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ bzw. $K \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ so, dass -1 ein 4-facher Eigenwert von $A + BK$ ist.
Hinweis: Nutzt man Übung 6 Aufgabe 2d) aus, so vereinfacht sich die Rechnung im Fall des Satelliten.

Lösung Aufgabe 1. Δ

a) Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, gilt es im MIMO-Fall eine Rückführung $G \in \mathbb{F}^{m\times n}$ zu bestimmen, sodass $R(A + BG, Be_r)$ steuerbar ist. Sofern das Zustandssystem bereits mit der Spalte b_r der Matrix B steuerbar ist, kann das bestimmen einer Matrix G übersprungen werden und direkt eine Zustandsrückführung für $R(A, b_r)$ ermittelt werden kann. Falls dies nicht der Fall ist, gilt es Matrix G zu bestimmen, welche eine Verschaltung aller Eingänge repräsentiert, sodass das System $A + BG$ mit der Spalte b_r der B-Matrix steuerbar ist.

Aus Übung 6 Aufgabe 2d) ist bekannt, dass (A, B_t) steuerbar ist. Das heißt, das System ist mit

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = (0, 0, 0, 1)^T$$

also $(A+BG,b)=(A,b)$, steuerbar ist. Es gilt weiter

$$R(A,b)=\begin{pmatrix}0&0&2\omega&0\\0&2\omega&0&-2\omega^3\\0&1&0&-4\omega^2\\1&0&-4\omega^2&0\end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen $\widehat{K}\in\mathbb{R}^{1\times 4}$ so, dass $(X+1)^4$ das charakteristische Polynom von $A+b\widehat{K}$ ist. Dazu verwenden wir die Ackermann-Formel

$$\widehat{K}=-(0,0,0,1)R(A,b)^{-1}(A+1\cdot\mathrm{id})^4.$$

Wir lösen das Gleichungssystem $R(A,b)^T\xi=(0,0,0,1)^T$, d.h. das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&2\omega&1&0\\2\omega&0&0&-4\omega^2\\0&-2\omega^3&-4\omega^2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

und erhalten $\xi^T=(0,0,0,1)^TR(A,b)^{-1}=(0,\frac{1}{6\omega^3},-\frac{1}{3\omega^2},0)$. Weiter gilt

$$(A+1\cdot\mathrm{id})^2=\begin{pmatrix}3\omega^2+1&2&0&2\omega\\6\omega^2&1-\omega^2&0&4\omega\\0&-2\omega&1&2\\-6\omega^3&-4\omega&0&1-4\omega^2\end{pmatrix}$$

und damit

$$(A+1\cdot\mathrm{id})^4=\begin{pmatrix}-3\omega^4+18\omega^2+1&4-4\omega^2&0&-2\omega\left(\omega^2-6\right)\\-12\omega^2\left(\omega^2-1\right)&\omega^4-6\omega^2+1&0&-8\omega\left(\omega^2-1\right)\\-24\omega^3&2\omega\left(\omega^2-6\right)&1&4-16\omega^2\\6\omega^3\left(\omega^2-6\right)&8\omega\left(\omega^2-1\right)&0&4\omega^4-24\omega^2+1\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\widehat{K}=\Big(-6\omega-\frac{2}{\omega},-\frac{1}{6\omega^3}+\frac{\omega}{2}-\frac{3}{\omega},\frac{1}{3\omega^2},-4\Big)$$

und somit gilt für $K\in\mathbb{R}^{2\times 4}$ mit

$$K=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-6\omega-\frac{2}{\omega}&-\frac{1}{6\omega^3}+\frac{\omega}{2}-\frac{3}{\omega}&\frac{1}{3\omega^2}&-4\end{pmatrix},$$

dass $(X+1)^4$ das charakteristische Polynom von $A+BK$ ist.

b) Wir bemerken zunächst, dass weder (A,Be_1) noch (A,Be_2) steuerbar ist. Daher können wir $G=0$ nicht wählen. Auch wenn es praktikabel ist ein G zufällig zu wählen, gehen wir hier wie im Beweis von Satz 24 vor, um ein geeignetes G zu bestimmen. Wir setzen

$u_0 = e_1$, $\xi_1 = (0,0,1)^T$, $u_1 = (0,0)^T$ und erhalten

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das erhaltene ξ_2 ist linear unabhängig von ξ_1 und kann somit gewählt werden. Es wird $u_2 = (0,1)^T$ gewählt und man erhält

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist somit drei linear unabhängig Vektoren vorhanden. Die Matrix G kann dann mit dem Gleichungssystem

$$(u_1, u_2, (0,0)^T)^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T G^T,$$

bestimmt werden. Es ergibt sich also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix},$$

und man erhält:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun $\widehat{K}$ so, dass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $A+BG+b\widehat{K}$ ist. Es gilt

$$A + BG = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$R(A+BG, b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen $R(A+BG,b)^T \tilde{\xi} = (0,0,1)^T$ und erhalten $\tilde{\xi} = (1,0,0)^T$. Weiter gilt

$$\widehat{K} = -(1,0,0)(A + \mathrm{id})^3 = -(1,0,0) \begin{pmatrix} -2 & -6 & 4 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = (2, 6, -4)$$

Das gesuchte K ist damit gegeben durch

$$K = G + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_0 = e_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}}_{\widehat{K}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie bereits erwähnt wurde, ist es deutlich praktikabler für G eine beliebige Matrix zu wählen. Es ist lediglich eine Matrix erfordert, die das System $R(A+BG, Be_r)$ steuerbar macht. Wählt man beispielsweise folgende beliebige Matrix

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und betrachtet man die Matrix

$$A + B\widehat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zeigt sich beim betrachten der Steuerbarkeitsmatrix

$$R(A + B\widehat{G}, Be_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dass das System auch mit der willkürlich gewählten Matrix $\widehat{G}$ steuerbar ist. Der vorgestellte Rechenweg zum bestimmen von K kann mit der hier gewählten Matrix $\widehat{G}$ analog durchgeführt werden.

Aufgabe 2. Zustandsrückführung und Beobachtbarkeit
Gegeben sind die Matrizen A,B und C,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

b) Ist das Zustandssystem (A, C) beobachtbar?

Lösung Aufgabe 2.

a) Zunächst muss geprüft werden, ob das gegebene Zustandssystem mit einer der beiden Spalten b_1 und b_2 der Eingangsmatrix B steuerbar ist. Hierzu werden die beiden Steuerbarkeitsmatrizen aufgestellt:

$$R(A, b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$R(A, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist unmittelbar erkennbar, das beide Steuerbarkeitsmatrizen keinen vollen Rang besitzen und demnach nicht für den Regler-Entwurf verwendet werden können. Daher muss eine Matrix G so bestimmt werden, dass $R(A+BG, b_i)$ steuerbar ist. An dieser Stelle wird eine willkürliche Wahl von G getroffen, alternativ wäre auch der gleiche Ansatz wie aus Übung 8, Aufgabe 2 verwendbar. Es wird

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

verwendet und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} A + BG &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für b_i wird der zweite Vektor der Eingangsmatrix b_2 gewählt und damit ergibt sich die Steuerbarkeitsmatrix

$$R(A+BG, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix besitzt offensichtlich vollen Rang, womit die gewählte Matrix G verwendbar ist. Die Berechnung des Reglers $\tilde{K}$ erfolgt dann über die Ackermann-Formel

$$\tilde{K} = -(0,0,1) R(A+BG, b_2)^{-1} p(A+BG) .$$

Wie in der Vorlesung empfohlen, ist es nicht ratsam die Inverse der Steuerbarkeitsmatrix zu berechnen, sofern diese nicht über eine direkte Formel berechnbar ist. Daher wird das Gleichungssystem

$$R(A+BG, b_2)^T \xi = (0,0,1)^T$$

gelöst. Damit erhält man

$$\xi^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Desweiteren muss noch $p(A+BG)$ bestimmt werden. Die Aufgabenstellung fordert einen dreifachen Eigenwert -2, weshalb sich für $p(A+BG)$

$$\begin{aligned} p(A+BG) &= (A+BG+2I)^3 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 \\ 28 & 20 & 0 \\ 12 & 14 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt. Damit lässt sich nun $\tilde{K}$ wie bereits erwähnt bestimmen:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 \\ 28 & 20 & 0 \\ 12 & 14 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Der gesuchte Regler K ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} K &= G + e_2\tilde{K} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Die Steuerbarkeit lässt sich zeigen, indem man die Beobachtbarkeitsmatrix nach Kalman

$$O(A,C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

auf ihren Rang überprüft. Ist dieser gleich der Systemordnung n, so ist das System vollständig beobachtbar, andernfalls nicht. Es gilt also:

$$O(A,C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix besitzt offensichtlich vollen Rang, demnach ist das Zustandssystem (A,C) vollständig beobachtbar.

Hinweis: Wie in der Vorlesung gezeigt, ist die Beobachtbarkeitsmatrix $O(A, C)$ äquivalent zur Steuerbarkeitsmatrix $R(A^T, C^T)$. Deshalb gilt, ist das System $R(A^T, C^T)$ steuerbar, so ist auch das System $O(A, C)$ beobachtbar. Es kann also zur Überprüfung der Beobachtbarkeit auch das Steuerbarkeitskriterium mit A^T und C^T herangezogen werden.