F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2018

Übung 7 - Lösung

Thema: Steuerbarkeitsanalyse, Polplatzierung durch Zustandsrückführung

Aufgabe 1. Parameterabhängige Steuerbarkeit
Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgaben

a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass (A, B) steuerbar ist.

b) Bestimmen Sie für die nicht steuerbaren Fälle aus a) eine invertierbare Transformation $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $1 < r < 3$ gilt.

Lösung Aufgabe 1.

a) Es gilt

$$R(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^2 & 3 + 2(-2 + \alpha) - \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist $\alpha \neq 0$, so sind die ersten drei Spalten von $R(A, B)$ linear unabhängig, das heißt es gilt $Rang\ R(A, b) = 3$. Das System ist für $\alpha \neq 0$, also steuerbar. Für $\alpha = 0$ ergibt sich

$$R(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Durch streichen der Nullspalten ergibt sich

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

es sind also nur die ersten beiden Spaltenvektoren linear unabhängig

$$(1,1,1)^T + (-1)\cdot(0,1,2)^T = (1,0,-1),$$
$$(-1)\cdot(1,1,1)^T + (0,1,2)^T = (-1,0,1),$$

sodass *Rang* $R(A,b) = 2 < 3$ gilt. Das System verliert also für $\alpha = 0$ seine Steuerbarkeit.

b) Es gilt also die erforderliche Transformationsmatrix zu bestimmen. Zunächst werden alle linear unabhängigen Vektoren aus $R(A,B)$ gewählt:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Diese gilt es dann mit einem linear von v_1 und v_2 unabhängigen Vektor v_3 zu ergänzen um die Matrix T invertierbar zu machen:

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich dann

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgeteilt in die Matrizen aus der Aufgabestellung ergibt sich:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{22} = -2, \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Zustandsrückführung und Eigenwertzuweisung (SIMO-Fall)
Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgaben

a) Zeigen Sie, dass -2 und $-2 \pm \sqrt{1+\alpha}$ die Eigenwerte von A sind.

b) Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist das System $\dot{x} = Ax + Bu$

   (i) asymptotisch stabil?

   (ii) steuerbar?

c) Bestimmen Sie $(0, 0, 1) \cdot R(A, B)^{-1}$ für den Fall $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.

d) Geben Sie für den Fall $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an (in Abhängigkeit von β), so dass (TAT^{-1}, TB) in Regelungsnormalform dargestellt ist.

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8$, $\beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ (in Abhängigkeit von β), so dass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $A + BK$ ist. Welche Aussage lässt sich über die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises $\dot{x} = (A+BK)x$ machen?

Lösung Aufgabe 2. a) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 - \alpha\lambda + 11\lambda - 2\alpha + 6.$$

Auch ohne die Angabe der Nullstellen in der Aufgabenstellung können wir auf die Nullstellen wie folgt schließen: Damit Terme mit α verschwinden ist -2 als möglicher Kandidat einen Versuch wert. In der Tat, -2 ist Nullstelle. Wir führen eine Polynomdivision mit $\lambda + 2$ durch und erhalten

$$(\lambda^3 + 6\lambda^2 - \alpha\lambda + 11\lambda - 2\alpha + 6) : (\lambda + 2) = \lambda^2 + 4\lambda + (3 - \alpha)$$

Daraus schließen wir schnell auf die anderen beiden Nullstellen:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - (3-\alpha)} \\ &= -2 \pm \sqrt{1+\alpha}\,. \end{aligned}$$

b) Das System ist asymptotisch stabil genau dann, wenn $\alpha < 3$, $\beta \in \mathbb{R}$. Denn

$$\operatorname{Re}(-2+\sqrt{1+\alpha}) = \begin{cases} -2+\sqrt{1+\alpha}, & \alpha \geq -1 \\ -2, & \alpha < -1 \end{cases},$$

also gilt $\operatorname{Re}(-2+\sqrt{1+\alpha}) < 0$ genau dann, wenn $\alpha < 3$.

Es gilt

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3+\alpha \\ 0 & \beta & -5\beta+\alpha\beta \\ 1 & -3+\alpha & 9-3\alpha \end{pmatrix},$$

und folglich

$$\det R(A,B) = -3\beta + 4\alpha\beta - \alpha^2\beta = -\beta(\alpha^2 - 4\alpha + 3).$$

Daher

$$\det R(A,B) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = 3.$$

Also ist das System steuerbar genau dann, wenn $\beta \neq 0$ und $\alpha \notin \{1,3\}$.

c) Zunächst gilt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \beta & -5\beta \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

sowie

$$R(A,B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & -3 \\ -3 & -5\beta & 9. \end{pmatrix}$$

Nach Vorlesung ist nicht empfehlenswert die Inverse von $R(A,B)$ zu berechnen sondern stattdessen das lineare Gleichungssystem

$$R(A,B)^T\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Es folgt

$$\xi^T = (0,0,1)R(A,B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\beta} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

d) Nach der Vorlesung gilt $\xi^T = v$ und die Transformationsmatrix ergibt sich durch

$$T = \begin{bmatrix} v \\ v \cdot A \\ v \cdot A^2 \\ \vdots \\ v \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe von c) ist die Transformationsmatrix daher gegeben durch

$$T = \begin{bmatrix} v \\ v \cdot A \\ v \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\beta} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{\beta} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{\beta} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix},$$

und

$$TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e) Es gilt für $\alpha = 8$ und $\beta \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & \beta & 3\beta \\ 1 & 5 & -15 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$R(A,B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 5 \\ 5 & 3\beta & -15 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$R(A,B)^T \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\xi^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{35} & \frac{1}{7\beta} & -\frac{1}{35} \end{pmatrix}.$$

Mit der Ackermannschen Formel erhalten wir

$$K = -(0,0,1)R(A,B)^{-1}(A+1)^3 = -\begin{pmatrix} \frac{1}{35} & \frac{1}{7\beta} & -\frac{1}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16 & 0 & 12 \\ -24\beta & -1 & 15\beta \\ 96 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{232}{35} & \frac{1}{7\beta} & -\frac{127}{35} \end{pmatrix}.$$

Da -1 der einzige Eigenwert von $A+BK$ ist, ist der geschlossene Kreis (im Gegensatz zum offenen) asymptotisch stabil.