

Übung 3 - Lösung

Thema: Matrixexponentialfunktion

Aufgabe 1. Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion

Gegeben sind die folgenden vier Matrizen:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen A_1 bis A_4 jeweils die Matrix-Exponentialfunktion e^{At} . Beachten Sie dabei die in der Vorlesung 3. erwähnten Spezialfälle.

Lösung Aufgabe 1.

- a) Matrix A_1 ist eine obere Dreiecksmatrix, sodass sich die Eigenwerte direkt ablesen lassen. Es ergibt sich also für A_1 mit $\lambda_{1,2,3} = 2$ ein dreifacher Eigenwert. Nach der Vorlesung ist bekannt, dass eine Dreiecksmatrix mit nur einem Eigenwert wie folgt umgeformt werden kann:

$$e^{At} = e^{\lambda t} \cdot e^{(A-\lambda I)t}.$$

Dabei entsteht ein Produkt aus einem Skalar und einer nilpotenten Matrix. Aus der Vorlesung ist ebenfalls bekannt, dass sich die Matrix-Exponentialfunktion einer nilpotenten Matrix direkt über die Reihe

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k t^k}{k!}$$

berechnen lässt. Es genügt also, die allgemeine Reihe zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion bis zum $n - 1$ -Glied auszuwerten, wobei n der Dimension von A entspricht.

Es gilt also:

$$e^{A_1 t} = e^{2t} \cdot e^{N \cdot t}$$

mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N ist wie bereits erwähnt nilpotent, sodass $e^{N \cdot t}$ direkt über die Reihe (mit $n = 3$) berechenbar ist:

$$\exp(Nt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die gesuchte Matrix unmittelbar:

$$e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & \frac{1}{2}e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- b) Die Matrix A_2 ist eine allgemeine 3x3 Matrix, sodass es zunächst erforderlich ist, die Jordan-Normalform der Matrix zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Eigenwerte mit

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

berechnet. Die Eigenwerte einer 3x3 Matrix lassen sich beispielsweise mit der Regel von Sarrus berechnen:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda - 4 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich also zu

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1),$$

woraus die drei Eigenwerte 4, 2 und 1 unmittelbar folgen. Die Jordan-Normalform

ergibt sich also sofort:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T.$$

Um die Matrix-Exponentialfunktion mit $e^{At} = e^{T^{-1}JT} = Te^J T^{-1}$ zu berechnen, muss noch die Transformationsmatrix T berechnet werden, welche sich in dem Fall von drei verschiedenen Eigenwerten aus den jeweiligen Eigenvektoren ergibt, die mit Hilfe von

$$(\lambda I - A)x = 0$$

ermittelt werden können. Diese ergeben sich zu:

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Somit ergibt die Matrix-Exponentialfunktion zu:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1t} \end{pmatrix}}_{e^{Jt}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ -e^t + e^{4t} & e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ e^t - e^{4t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c) Von der Matrix A_3 gilt es ebenfalls zunächst die Jordan-Normalform zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Eigenwerte von A_3 benötigt. Analog zur Aufgabe b) ergeben sich die Eigenwerte als die Nullstellen von

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3,$$

also ist $\lambda = 2$ ein 3-facher Eigenwert. Da in diesem Fall ein Eigenwert mehrfach auftritt, ist die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte höhere als dessen geometrische Vielfachheit, weshalb zur Berechnung der Transformationsmatrix T die Hauptvektoren benötigt werden. Hierzu werden zunächst

$$\tilde{B} := A - \lambda I = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnet. Außerdem gilt $\tilde{B}^3 = 0$. Zunächst wird der Kern von \tilde{B} benötigt, welcher sich mit

$$\ker \tilde{B} = \tilde{v}_1 \quad \text{mit} \quad \tilde{B} \cdot \tilde{v}_1 = 0$$

berechnet. Also gilt $\tilde{v}_1 = (1, -1, 1)^T$. Desweiteren wird ein Vektor $\tilde{v}_2 \in \ker \tilde{B}^2$ gesucht, für den $\tilde{v}_2 \notin \ker \tilde{B}$ gilt. Der Vektor $\tilde{v}_2 = (0, -1, 1)^T$ erfüllt diese Bedingung. Außerdem wird ein Vektor $\tilde{v}_3 \in \ker \tilde{B}^3$ gesucht, für den $\tilde{v}_3 \notin \ker \tilde{B}^2$ gilt. Der Vektor $\tilde{v}_3 = (0, 0, 1)^T$ erfüllt diese Bedingung. Damit lässt sich dann wie Transformationsmatrix T zu

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{B}^2 \tilde{v}_3 & \tilde{B} \tilde{v}_3 & \tilde{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Damit folgt schlussendlich die Jordan-Normalform der Matrix A_3 zu:

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es fällt unmittelbar auf, dass die Jordan-Normalform der Matrix A_3 der Matrix A_1 entspricht. Es gilt also:

$$e^{A_2 t} = e^{(T A_1 T^{-1}) t} = T e^{A_1 t} T^{-1}.$$

Der Ausdruck $e^{A_1 t}$ wurde ja bereits in Aufgabe a) berechnet, sodass sich für $e^{A_3 t}$ ergibt:

$$\begin{aligned} e^{A_3 t} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} t & \frac{1}{2} e^{2t} t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{e^{A_1 t}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t}(t+1) & e^{2t} t(t+4) & e^{2t} t(t+3) \\ -e^{2t} t & -e^{2t}(t^2+2t-1) & -e^{2t} t(t+1) \\ e^{2t} t & e^{2t} t(t+2) & e^{2t}(t^2+t+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- d) Zunächst gilt es wieder, die Jordan-Normalform von A_4 zu berechnen. Das charakteristische Polynom von A_4 ist $\chi_A(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-1)^2$, die Eigenwerte von A sind also 1 und -3 , wobei der Eigenwert 1 doppelt vorkommt. Es stimmen also die algebraische und die geometrische Vielfachheit nicht überein. Die Jordan-Normalform von A_4 ist daher nach der Vorlesung 3 wie folgt gegeben:

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt für die Matrix-Exponentialfunktion wie bereits bekannt:

$$e^{A_4 t} = T e^{J t} T^{-1}.$$

Für die Berechnung von $e^{A_4 t}$ wird also die Transformationsmatrix T sowie der Ausdruck $e^{J t}$ benötigt. Für den Eigenwert -3 reicht für den entsprechenden Eintrag in T die Kenntnis eines Eigenvektors; Eigenvektor zu $\lambda = -3$ ist $v_1 = (1, 0, 2)^T$. Um geeignete Hauptvektoren für den Eigenwert 1 zu bestimmen, gilt es wie in Aufgabe c) zunächst $\tilde{B} = A - \lambda I$ und \tilde{B}^2 zu berechnen:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Für $\tilde{v}_1 = (0, 1, 0)^T$ gilt $\ker \tilde{B} = \tilde{v}_1$. Es ist also nun ein $\tilde{v}_2 \in \ker \tilde{B}^2$ gesucht, so dass $\tilde{v}_2 \notin \ker \tilde{B}$ gilt. Der Vektor $\tilde{v}_2 = (1, 0, 0)^T$ erfüllt diese Bedingung. Es ergibt sich also die Transformationsmatrix zu:

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & \tilde{B}\tilde{v}_2 & \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung von $e^{J t}$ lässt sich die Jordan-Normalform offensichtlich wie folgt

$$\left(\begin{array}{c|cc} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

in zwei kleinere Diagonalmatrizen aufspalten, sodass sich die Matrix-Exponentialfunktion von J also wie in Vorlesung 3 vorgestellt auch wie folgt berechnen lässt:

$$e^{J t} = \text{diag}(e^{-3t}, e^{\tilde{A} t}),$$

wobei mit \tilde{A} die untere Diagonalmatrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus der Jordan-Normalform J bezeichnet wird. Die Matrix \tilde{A} ist, wie die Matrix A_1 , eine obere Dreiecksmatrix mit nur einem doppelten Eigenwert $\lambda = 1$, sodass sich zur Berechnung von $e^{\tilde{A} t}$ das bereits aus Aufgabe a) bekannte Verfahren anwenden lässt:

$$e^{\tilde{A} t} = e^{1t} \cdot e^{Nt} \quad \text{mit} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N ist offensichtlich nilpotent, da es eine echte Dreiecksmatrix darstellt, weshalb sich e^{Nt} mit Hilfe der Reihenentwicklung bis $k = n - 1 = 2$ berechnen

lässt. Damit ergibt sich $e^{\tilde{A}t}$ zu:

$$\begin{aligned} e^{\tilde{A}t} &= e^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix e^{Jt} ergibt sich dann unmittelbar zu:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Somit folgt für die Matrix-Exponentialfunktion e^{A_4t} wie zu Beginn der Aufgabe festgestellt:

$$\begin{aligned} e^{A_4t} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_T \cdot \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^t) \\ -2te^t & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$