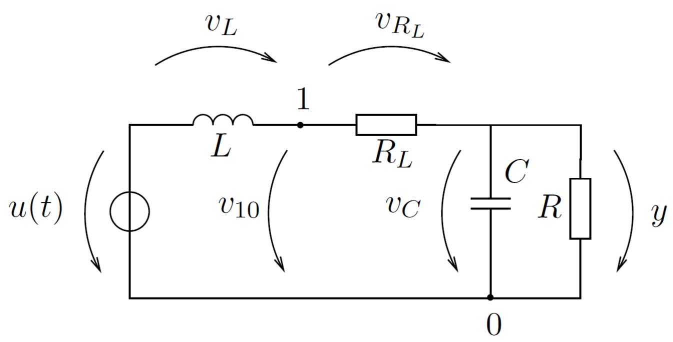
F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2018

Übung 2 - Lösung

Thema: Zustandstransformation, Zustandssignale

Aufgabe 1. Zustandstransformation
Gegeben ist ein elektrisches Netzwerk mit der Spannung u über der unabhängigen Stromquelle



als Eingang und der Spannung y über dem Widerstand R als Ausgang. Für die Bauteile geilten die physikalischen Gesetzmäßigkeiten $v_L = L\frac{d}{dt}i_L$, $i_C = C\frac{d}{dt}v_C$ mit $L > 0$, $R > 0$, $R_L > 0$ und $C > 0$. Verwenden Sie zur mathematischen Beschreibung des Netzwerkes die Kirchhoff'schen Gesetze.

Aufgabe

a) Stellen Sie das Zustandsraum-Modell

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

mit dem Zustandssignal $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf, wobei mit v_{10} die Spannung zwischen Knoten 1 und 0, und mit v_C die Spannung über C bezeichnet wird.

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{2\times2}$, sodass für das Zustandssignal $\tilde{x} := (\phi, q)^T = Tx$ gilt. Mit ϕ wird der Fluss der Induktivität und mit q die Ladung des Kondensators beschrieben.
Hinweis: Man verwende $\phi = Li_L$ und $q = Cv_C$.

c) Stellen Sie das Zustandsraum-Modell des elektrischen Netzwerks auf, bei dem das Zustandssignal durch $\tilde{x} = (\phi, q)^T$ aus Teilaufgabe b) gegeben ist.

Lösung Aufgabe 1.

a) Um das Zustandsraum-Modell aufzustellen muss zunächst eine Differentialgleichung für $x = (v_{10}, v_c)^T$ herleitet werden. Es gilt nach dem Maschensatz

$$v_{10} = v_{R_L} + v_C = R_L \cdot i_L + v_C \,.$$

Durch Differenzieren und mit Hilfe von $v_L = L\frac{d}{dt}i_L$ folgt daraus:

$$\dot{v}_{10} = R_L \cdot \frac{d}{dt}i_L + \frac{d}{dt}v_C = R_L \cdot \frac{v_L}{L} + \frac{d}{dt}v_C \,.$$

Weiterhin gilt auf Grund der Kirchhoff'schen Gesetze:

$$v_L = u - v_{10} \quad \wedge \quad i_C = i_L - i_R \quad \wedge \quad v_C = v_R = y$$

Mit der Hilfe der Bauteilgleichung des Kondensators und $i_R = \frac{v_R}{R}$ folgt dann:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}v_C}_{\dot{v}_C} = \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}(i_L - i_R) = \frac{1}{C}(i_L - \frac{v_C}{R}).$$

Durch Einsetzen der Gleichungen für v_L und $\frac{d}{dt}v_C$ in die Differentialgleichung für v_{10} ergibt sich mit Hilfe von $i_L = i_{R_L} = \frac{v_{R_L}}{R_L}$:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{10} &= \frac{R_L}{L}\underbrace{(u - v_{10})}_{v_L} + \underbrace{\frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC}}_{\dot{v}_C} \\
&= -\frac{R_L}{L}(u - v_{10}) + \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC} \\
&= -\frac{R_L}{L}v_{10} - \frac{1}{RC}v_C + \frac{R_L}{L}u + \frac{v_{R_L}}{R_L C} \,.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $v_{R_L} = v_{10} - v_C$ ergibt sich schlussendlich:

$$\dot{v}_{10} = \left(\frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L}\right) v_{10} + \left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right) v_C + \frac{R_L}{L}u.$$

Die Differentialgleichung für v_C wurde bereits hergeleitet und ergibt sich durch Einsetzen von $i_L = \frac{v_{10} - v_C}{R_L}$ zu:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_C &= \frac{1}{C}(\frac{v_{10} - v_C}{R_L} - \frac{v_C}{R}) \\
&= \left(\frac{1}{R_L C}\right) v_{10} + \left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right) v_C \,.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich das gesuchte Zustandsraum-Modell zu:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{R_L C} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{R_L}{L} \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt das Zustandssignal aus Aufgabe a) in das Zustandssignal $\tilde{x}$ zu transformieren:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix} .$$

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt, dass $\phi = L \cdot i_L$ und $q = C \cdot v_C$ gilt. Für den zweiten Zustand in $\tilde{x}$ ist also bereits ein direkter mathematischer Zusammenhang zum alten Zustandssignal x bekannt. Für den ersten Zustand muss ein solcher erst noch hergeleitet werden. Es ist aus Aufgabe a) bekannt, dass

$$i_L = \frac{v_{10} - v_C}{R_L}$$

gilt. Somit ergibt sich

$$\phi = L \cdot i_L = \frac{L}{R_L} \cdot (v_{10} - v_C)$$

für den ersten Zustand ϕ des gewünschten Zustandssignal $\tilde{x}$. Somit folgt für die Transformationsmatrix T unmittelbar:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{L}{R_L} & -\frac{L}{R_L} \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{T} \cdot \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

c) Es gilt das Zustandsraum-Modell aus Aufgabe a) mit der Transformationsmatrix T aus Teilaufgabe b) zu transformieren um das Netzwerk mit dem neuen Zustandssignal $\tilde{x} = (\phi, q)^T$ zu beschreiben. Mit Hilfe von $\tilde{x} = T \cdot x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}\tilde{x} + TBu \\ y &= Cx = CT^{-1}\tilde{x} \,. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des gewünschten Zustandsraum-Modell ist es also erforderlich, $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$ sowie $\tilde{C} = CT^{-1}$ zu berechnen. Für T^{-1} gilt:

$$T^{-1} = \frac{R_L}{LC} \begin{pmatrix} C & \frac{L}{R_L} \\ 0 & \frac{L}{R_L} \end{pmatrix} .$$

Die gesuchten Matrizen ergeben sich also zu:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \frac{R_L}{LC} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{R_L} & -\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \frac{L}{R_L} \\ 0 & \frac{L}{R_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} , \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= TB = \begin{pmatrix} \frac{L}{R_L} & -\frac{L}{R_L} \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R_L}{L} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\ \tilde{C} &= CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{R_L}{LC} \begin{pmatrix} C & \frac{L}{R_L} \\ 0 & \frac{L}{R_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnung von Zustandssignalen
Es wird ein harmonischer Oszillator (mit Anregung) betrachtet, dessen Dynamik durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u(t),$$

gegeben ist. Es gilt $\gamma \geq 0$, $\omega > 0$ und $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{F}^2$ stellt das Eingangssignal dar.

Aufgabe Berechne Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

b) $u(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(2\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$.

Lösung Aufgabe 2.
Aus der Aufgabenstellung folgt $A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}$.

a) Aus Kapitel 1.4 der Vorlesung ist bekannt, dass für das Zustandssignal φ

$$\varphi(t, x_0, u(t) = 0) = \mathrm{e}^{At} x_0, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Der Ausdruck e^{At} lässt sich mit Hilfe der Jordan-Normalform von A bestimmen. Hierzu kann die folgende Formel

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

verwendet werden. Hierbei stellt J die Jordan-Normalform der Systemmatrix A dar, es gilt also

$$A = TJT^{-1}.$$

Zur Bestimmung der Matrix-Exponentialfunktion wird als die Jordan-Normalform von A sowie die zugehörige Transformation T benötigt. Dazu werden zunächst die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A benötigt. Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + \gamma)^2 + \omega^2 ,$$

sodass sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -\gamma - i\omega$ und $\lambda_2 = -\gamma + i\omega$ ergeben. Durch Lösen des Gleichungssystems

$$(\lambda_j I - A)x = 0, \ j = 1, 2$$

erhält man die Eigenvektoren $v_1 = (i, 1)^T$ bzw. $v_2 = (-i, 1)^T$ zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2. Setzt man nun

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man $A = TJT^{-1}$, wobei J die gesuchte Jordan-Normalform darstellt:

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - i\omega & 0 \\ 0 & -\gamma + i\omega \end{pmatrix}.$$

Mit

$$T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

folgt also

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= \mathrm{e}^{TJT^{-1}t} = T\mathrm{e}^{Jt}T^{-1} \\
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{2i} \begin{pmatrix} i\mathrm{e}^{i\omega t} + i\mathrm{e}^{-i\omega t} & \mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t} \\ -\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t} & i\mathrm{e}^{i\omega t} + i\mathrm{e}^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\varphi(t, x_0, u(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0.$$

b) Um eine langwierige Rechnung zu vermeiden, wird für $u(t)$ mit

$$\widetilde{u}(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} -i\mathrm{e}^{2\omega i t} \\ \mathrm{e}^{2\omega i t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ein Ersatzsignal definiert. Es zeigt sich, dass für $\widetilde{u}(t)$

$$\operatorname{Re} \widetilde{u}(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} -i\cos(2\omega t) - i^2 \sin(2\omega t) \\ \cos(2\omega t) + i \sin(2\omega t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) \\ \cos(2\omega t) \end{pmatrix} = u(t).$$

gilt, sodass man sich Satz 3

$$\varphi(t, x_0, u) = \varphi(t, x_0, \operatorname{Re} \widetilde{u}) = \operatorname{Re}(\varphi(t, x_0, \widetilde{u}))$$

aus der Vorlesung zunutze machen kann. Es genügt also $\varphi(t, x_0, \widetilde{u})$ zu berechnen. Nach Kapitel 1.4 der Vorlesung gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x_0, \widetilde{u}) &= \mathrm{e}^{At}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\widetilde{u}(s)\ \mathrm{d}s = \\
&= \mathrm{e}^{At}x_0 + \mathrm{e}^{At} \int_0^t \mathrm{e}^{-As}\widetilde{u}(s)\ \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Zunächst ist es erforderlich, den Integranden der letzten Gleichung zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-As}\widetilde{u}(s) &= T \cdot \mathrm{e}^{-\gamma s} \cdot \mathrm{e}^{-Js} \cdot T^{-1} \begin{pmatrix} -i\mathrm{e}^{2\omega i s} \\ \mathrm{e}^{2\omega i s} \end{pmatrix} \\
&= T \cdot \mathrm{e}^{-\gamma s} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma s + i\omega s} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\gamma s - i\omega s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2\omega i s} \end{pmatrix} = \\
&= T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\omega i s} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen des ermittelten $\mathrm{e}^{-As}\widetilde{u}(s)$ und des Ausdrucks für e^{At} aus Aufgabe a) erhält man

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x_0, \widetilde{u}) &= \mathrm{e}^{At} x_0 + \underbrace{T \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} T^{-1}}_{\mathrm{e}^{At}} \cdot T \int_0^t (0, \mathrm{e}^{\omega i s})^T \, \mathrm{d}s = \\
&= \mathrm{e}^{At} x_0 + T \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega}(\mathrm{e}^{i\omega t} - 1) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{At} x_0 + \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega}(\mathrm{e}^{-\gamma t + 2i\omega t} - \mathrm{e}^{-\gamma t + i\omega t}) \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{At} x_0 + \begin{pmatrix} \frac{-1}{\omega}(\mathrm{e}^{-\gamma t + 2i\omega t} - \mathrm{e}^{-\gamma t + i\omega t}) \\ \frac{1}{i\omega}(\mathrm{e}^{-\gamma t + 2i\omega t} - \mathrm{e}^{-\gamma t + i\omega t}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schließlich das gesuchte Zustandssignal

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x_0, u) = \mathrm{Re}(\varphi(t, x_0, \widetilde{u})) &= \mathrm{e}^{At} x_0 + \frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma t} \left(\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0 + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$