9. Übung zur Vorlesung
„Moderne Methoden der Regelungstechnik"

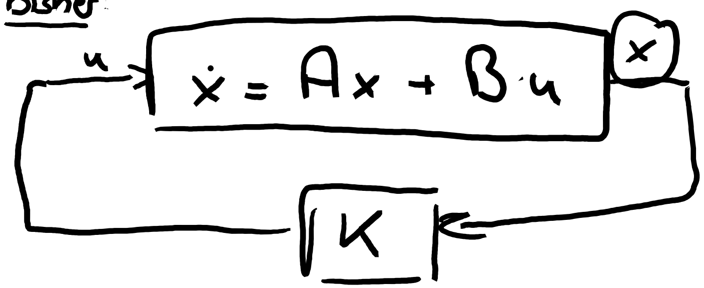
Beobachtbarkeit & Entwurf von Beobachtern

Felix Goßmann M.Sc.

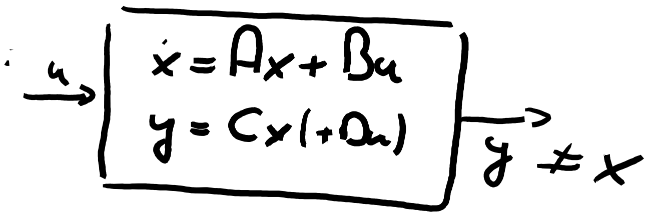
Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Lüneberger Beobachter

bisher



Realität: (meist)



Beobachter: $\hat{x}$ aus y schätzen

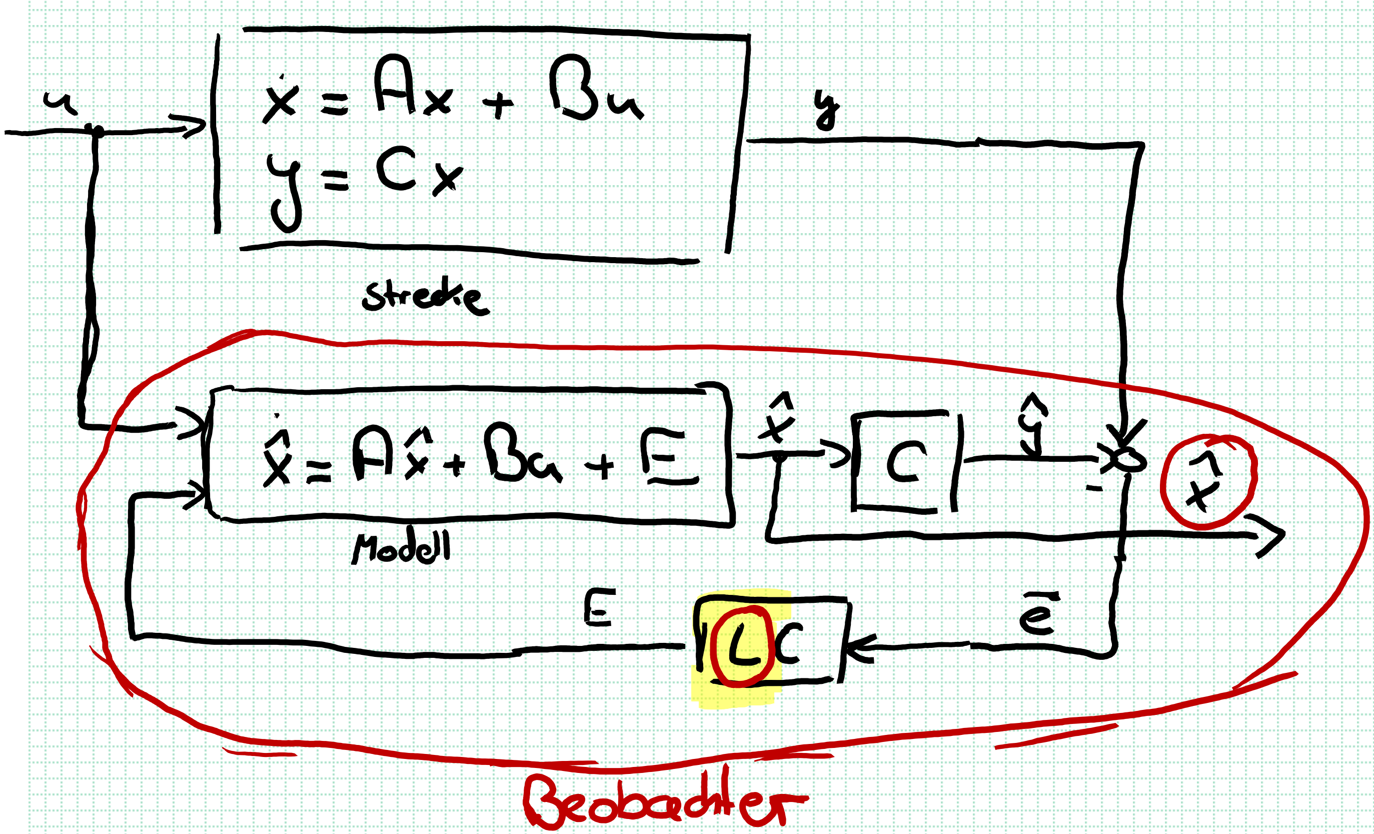
$\hat{x} \approx x$

- Einfachster Ansatz zum Beobachter-Entwurf
- „Regler" der die Abweichungen zwischen Modell und Realität minimiert
- Messergebnisse werden fortlaufend mit Simulationsergebnissen verglichen
- Beobachter „regelt" diesen Beobachterfehler, sodass dieser im Optimalfall verschwindet

$$\boxed{e = \hat{x} - x}$$

$$\lim_{t \to \infty} e = 0$$

Lüneberger Beobachter



Lüneberger Beobachter

Beobachter-Matrix $\hat{=}$ K des Reglers

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

$$e = \hat{x} - x \rightarrow 0 \qquad \dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A + LC)e$$

↳ Analogie zum Regler

Bestimmen von L

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

Gegeben sind die folgenden beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei A die Systemmatrix und C die Ausgangsmatrix eines Zustandssystems darstellt.

Aufgaben:

a) Ist das Zustandssystem für (A, C) beobachtbar?

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

a) Ist das Zustandssystem für (A, C) beobachtbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O(A,C) = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C \\ \\ C \cdot A \end{matrix} \rightarrow \text{Rang } 3$$

$\Rightarrow$ vollst. beobachtbar

$R(A^T, C^T) \rightarrow$ steuerbar $\rightarrow (A, C)$ beobachtbar

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ackermann-Formel: $(A, B) \longrightarrow (A^T, C^T) \longrightarrow$ Für alle Entwurfsver. von Zustandsreglern anwenbar

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \qquad c_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A^T, c_1^T) \longrightarrow R(A^T, c_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Rang < 3

↳ nicht steuerbar

$R(A^T, c_2^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Rang < 3

↳ nicht steuerbar

G, sodass $(A^T + \underline{\underline{C^T}}G, c_{1,2}^T)$ steuerbar

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T + C^T G = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A^T + C^T G, c_1^T) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{vollen Rang}$$

$\hookrightarrow$ steuerbar

dreifachen EW von $\lambda = -1$

$$\hat{L}^T = -\underbrace{(0, 0, 1)\, R(A^T + C^T G, c_1^T)^{-1}}\, \cdot\, p(A^T + C^T G)$$

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

$$R(A^T + C^T G,\ c_1^T)^T \xi = (0,\ 0,\ 1)^T \quad \Longrightarrow \xi^T = (0, 0, -1)$$

$$\hat{L}^T = (0, 0, 1)\ \underbrace{p(A^T + C^T G)}$$

$$p(A^T + C^T G) = (A^T + C^T G + I)^3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}^T = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{(-5, -9, 0)}}$$

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

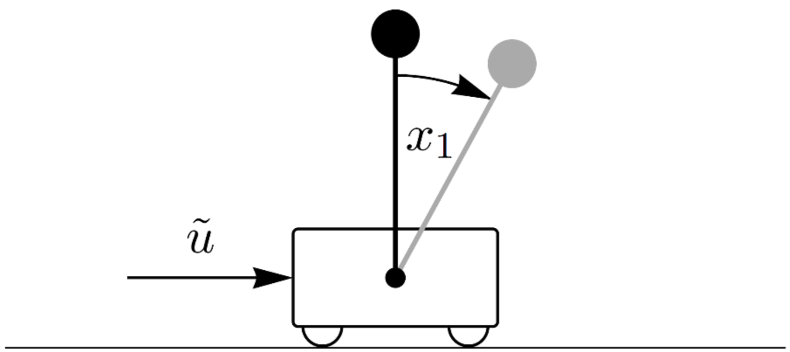
$$L^T = G + e_1 \hat{L}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-5, \; -9, \; 0)$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

Betrachtet wird ein Pendel mit der Masse m und Länge l, das wie folgt auf einem Wagen montiert ist.



Die Beschleunigung $\tilde{u}$ ist die Stellgröße des Systems, x_1 der angedeutete Winkel und g stellt die Erdbeschleunigung dar. Masse des Stabes und Reibung des Wagens wird vernachlässigt. Die Dynamik ist durch folgendes Differentialgleichungssystem gegeben

$$\dot{x}_1 = x_2\ ,$$

$$\dot{x}_2 = \omega^2 \sin x_1 - \tilde{u} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cos x_1$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

Aufgaben

a) Linearisieren Sie das DGL-System in der Ruhelage $x_1 = x_2$, $\tilde{u} = 0$ und erstellen daraus ein Zustandssystem in der bekannten Form. Es gilt $x = (x_1, x_2)^T$ und u(t) $= \tilde{u}(t)/g$. Der Winkel x_1 stellt die Ausgangsgröße dar.

b) Zeigen Sie, dass (A, B) steuerbar ist und bestimmen eine Zustandsrückführung $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, sodass $A + BK$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

c) Zeigen Sie, dass (A, C) beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

d) Ist der geschlossene Kreis aus Strecke, Beobachter und Regler stabil?

Aufgabe 2: Inverses Pendel

a) Linearisieren Sie das DGL-System in der Ruhelage $x_1 = x_2, \tilde{u} = 0$ und erstellen daraus ein Zustandssystem in der bekannten Form. Es gilt $x = (x_1, x_2)^T$ und u(t) = $\tilde{u}(t)/g$. Der Winkel x_1 stellt die Ausgangsgröße dar.

$$\dot{x}_1 = x_2\,,$$

$$\dot{x}_2 = \omega^2 sin\, x_1 - \tilde{u} \cdot \frac{\omega^2}{g} cos\, x_1$$

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad ; \quad B_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

b) Zeigen Sie, dass (A, B) steuerbar ist und bestimmen eine Zustandsrückführung $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, sodass $A + BK$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang } 2 \implies \text{vollst. steuerbar}$$

$$\lambda = -1$$

$$K = -(0,1)\underbrace{R(A,B)^{-1}} (A - \lambda \underline{I})^2$$

$$= (0,1)\frac{1}{\omega^4}\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \dots = \left(\frac{1+\omega^2}{\omega^2} , \frac{2}{\omega^2} \right)$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

c) Zeigen Sie, dass (A, C) beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei $\underline{-1}$ hat.

(A, C) muss beobachtbar sein

$\longrightarrow$ (A^T, C^T) steuerbar ist

$$R(A^T, C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang } 2 \Longrightarrow \text{beobachtbar}$$

$$L^T = -(0, 1)\, R(A^T, C^T)^{-1} (A^T + I)^2 = \ldots = \left(-2 \;,\; -(\omega^2 + 1)\right)$$

$$\underline{\underline{L = \begin{pmatrix} -2 \\ -(\omega^2 + 1) \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

d) Ist der geschlossene Kreis aus Strecke, Beobachter und Regler stabil?

Satz 29 Vorlesung

Seperationsprinzip

$\boxed{\text{wenn } (A+BK) \text{ und } (A+LC) \text{ einzeln stabil sind, dann ist auch in jedem Fall die Kombination aus beiden stabil.}}$