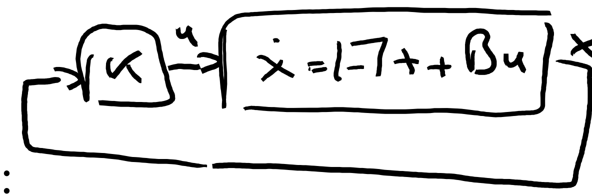
8. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

Zustandsrückführung im MIMO-Fall, Beobachtbarkeit

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Eigenwertzuweisung im MIMO-Fall



Gegeben ist das Zustandssystem des Satelliten aus Übung 6:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\omega > 0$

Aufgabe: Bestimmen sie ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, sodass -1 ein vierfacher Eigenwert von $A_{ge} = A + BK$ ist.

Hinweis: Mit Nutzung von Aufgabe 2d) aus Übung 6 vereinfacht sich die Aufgabe

Aufgabe 1: Bestimmen sie ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, sodass -1 ein vierfacher Eigenwert von $A + BK$ ist.
<u>*Hinweis:*</u> Mit Nutzung von Aufgabe 2d) aus Übung 6 vereinfacht sich die Aufgabe

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(A, b_2) vollst. steuerbar $\longrightarrow$ siehe Ü6

$\underline{\lambda = -1}$

$$\hat{K} = -(0,0,0,1)\, R(A,b_2)^{-1}\, (A - \lambda I)^4$$

$$R(A,b_2) = \begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{c|c|c|c} b_2 & A \cdot b_2 & A^2 b_2 & A^3 b_2 \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 1:

$$R(A,b_2)^T \xi = (0,0,0,1)^T \qquad (0,0,0,1)\, R(A,b_2)^{-1} = \xi^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 1 & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & -2\omega^3 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6\omega^3} \\ -\frac{1}{3\omega^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

vierfachen EW von $\lambda = -1$

$$(A+\lambda I)^4 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -3\omega^4+18\omega^2+1 & 4-4\omega^2 & 0 & -2\omega(\omega^2-6) \\ -12\omega^2(\omega^2-1) & \omega^4-6\omega^2+1 & 0 & -8\omega(\omega^2-1) \\ -24\omega^3 & 2\omega(\omega^2-6) & 1 & 4-16\omega^2 \\ 6\omega^3(\omega^2-6) & 8\omega(\omega^2-1) & 0 & 4\omega^4-24\omega^2+1 \end{array}\right)$$

Aufgabe 1:

$$\hat{k} = -\underbrace{(0,0,0,1)\, R(A,b_2)^{-1}}_{g^T} (A+\lambda I)^4$$

$$= \left(-6\omega - \frac{2}{\omega},\ -\frac{1}{6\omega^3} + \frac{\omega}{2} - \frac{3}{\omega},\ \frac{1}{3\omega^2},\ -4\right)$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6\omega - \frac{2}{\omega} & -\frac{1}{6\omega^3} + \frac{\omega}{2} - \frac{3}{\omega} & \frac{1}{3\omega^2} & -4 \end{array}\right)$$

Aufgabe 1: Eigenwertzuweisung im MIMO-Fall

Gegeben ist das folgende Zustandssystem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

~~mit $\omega > 0$~~

Aufgabe: Bestimmen sie ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, sodass -1 ein vierfacher Eigenwert von $A + BK$ ist.

$R(A+BG, Be_r)$

Aufgabe 1: Bestimmen sie ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, sodass -1 ein vierfacher Eigenwert von $A + BK$ ist.

$e_r = e_1$ $\qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_0$ $\qquad B e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\xi_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \xi_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\xi_1 = B u_0$

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 linear unabhängig

Aufgabe 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T G^T$$

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix}}_{G^T} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A + BG, b_1) \rightarrow$ steuerbar

Aufgabe 1:

$$A + BG = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R(A+BG, b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{K} = -\underbrace{(0,0,1)\,R(A+BG,b_1)^{-1}}\,p(A+BG)$$

Aufgabe 1:

$$R(A+BG,b_1)^T\hat{\xi} = (0,0,1)^T \longrightarrow \hat{\xi} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{k} = -(1,0,0)\cdot p(A+BG) = -(1,0,0)\begin{pmatrix}-2 & -6 & +4\\ x & x & x\\ x & x & x\end{pmatrix} = (2,6,-4)$$

$$K = G + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{e_1}\hat{k} = G + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(2,6,-4) = \begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+BK = A+B(G+e_1\hat{k}) = A+BG+b_1\hat{k}$$

Aufgabe 1: Kontrolle

$A + BK$

$$BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A + BK}_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:

$$\det(\lambda I - \tilde{A}) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ -3 & -6 & \lambda+4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda-1 \\ -3 & 6 \end{matrix}$$

$$K = G + e_r \hat{K}$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda+4) + 1\cdot 1\cdot(-3) + 0$$

$$-\left[1\cdot(-1)(\lambda+4)\right] - \left[(-6)\cdot 1\cdot \lambda\right] - 0$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2\cdot 1 + 3\lambda\cdot 1^2 + 1^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

Aufgabe 1:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Empfehlung: Beliebige Matrix G wählen und auf Steuerbarkeit prüfen

$$A + B\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A + B\hat{G}, b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Zustandsrückführung und Beobachtbarkeit

Gegeben sind die Matrizen A,B und C

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

b) Ist das Zustandssystem (A, C) beobachtbar?

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{cc} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad\;\; b_1 \;\; b_2 \end{array}$$

$$R(A,b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad R(A,b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang < 3   Rang < 3

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{willkürlich gewählt}$$

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

$$A+BG = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Korrektur

$$R(A+BG, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

$$\hat{K} = -\underbrace{(0,0,1)\, R(A+BG, b_2)^{-1}}\, \underbrace{p(A+BG)}$$

$$R(A+BG, b_2)^T \xi = (0,0,1)^T \longrightarrow \xi^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\lambda = -2$

$$p(A+BG) = (A + BG + 2I)^3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3 = \dots = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 \\ 28 & 20 & 0 \\ 12 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Korrektur zur Übung

$$\hat{K} = -\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 \\ 28 & 20 & 0 \\ 12 & 14 & 8 \end{pmatrix} = (-2, -4, -4)$$

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

$$K = G + e_2 \hat{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Korrektur zur Übung

Aufgabe 2: b) Ist das Zustandssystem (A, C) beobachtbar?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalman'sche Beobachtbarkeitsmatrix

$$O(A,C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = R(A^T, C^T)$$

$$O(A,C) = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C \\ CA \\ (CA)A \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 2: b) Ist das Zustandssystem (A, C) beobachtbar?

Matrix $O(A, C)$ besitzt vollen Rang

↳ System ist vollständig beobachtbar

$\Downarrow$

notwendige Bedingung für Beobachterentwurf

$R(A^T, C^T)$ → muss vollst. steuerbar sein, dann System vollst. beobachtbar