# 7. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

## Steuerbarkeitsanalyse, Zustandsrückführung

**Felix Goßmann M.Sc.**

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

## Aufgabe 1: Parameterabhängige Steuerbarkeit

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$

**Aufgaben:** a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $(A, B)$ steuerbar ist.

b) Bestimmen Sie für die nicht steuerbaren Fälle eine invertierbare Transformation $T \in \mathbb{R}^{3x3}$ so, dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \;\; T^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $(A, B)$ steuerbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R(A,B) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^2 & 3+2(-2+\alpha)-\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$B \qquad AB \qquad A^2 B$

für $\underline{\alpha \neq 0}$ steuerbar

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $(A, B)$ steuerbar ist.

$\underline{\alpha = 0}$:

$$R(A,B) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{rang} = 2 < n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$: nicht vollst. steuerbar

b) Bestimmen Sie für die nicht steuerbaren Fälle eine invertierbare Transformation $T \in \mathbb{R}^{3x3}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$ :

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Basis v. $R(A,B)$

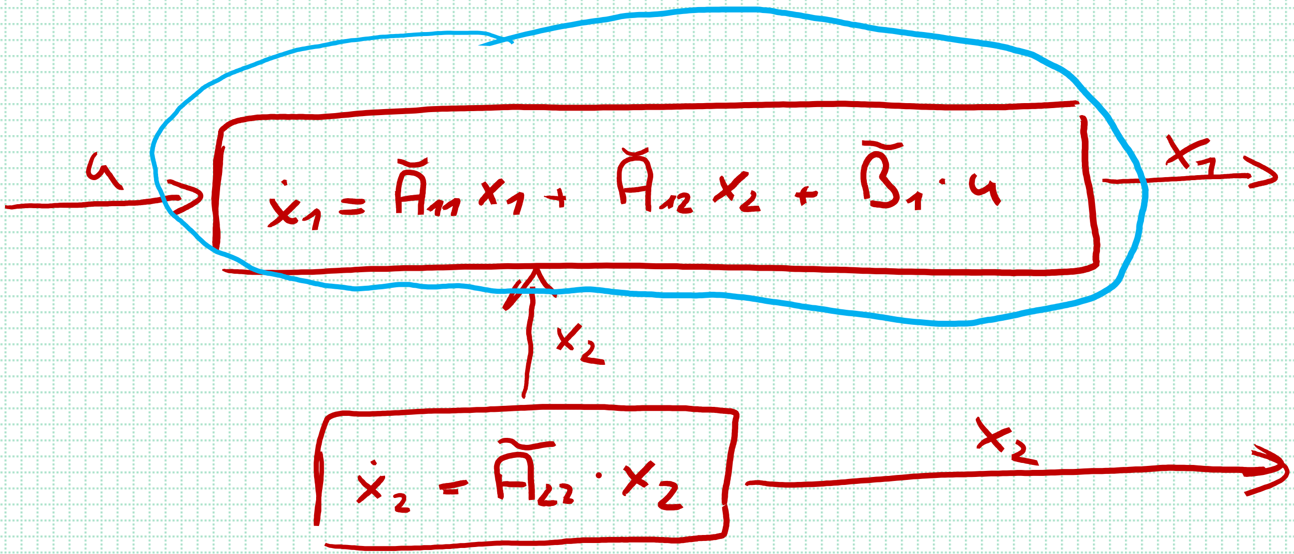
$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

beliebig l.u. Vektor

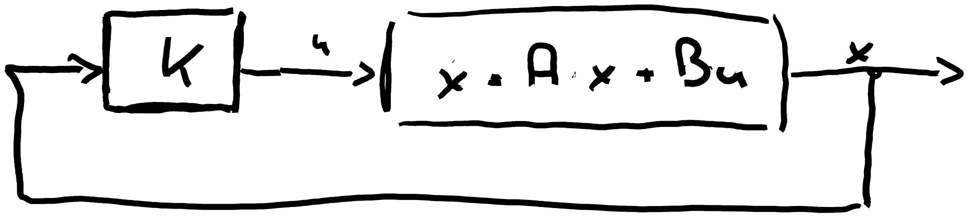
b) Bestimmen Sie für die nicht steuerbaren Fälle eine invertierbare Transformation $T \in \mathbb{R}^{3x3}$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

steuerbarer Teil



## Zustandsrückführung




- Viele Systeminformationen vorhanden
- Kleine Abweichungen sehr schnell & sehr gut korrigierbar
- Sehr gute Störunterdrückung und hohe Reglergüte erreichbar
- Viele (einfach umzusetzende) Verfahren verfügbar → Polplatzierung, LQR, ......

- Nachteile:
  - Alle Zustande müssen gemessen werden und online verfügbar sein
  - Nicht immer möglich → Beobachter
  - Vereinfachungen, Vernachlässigung von Zuständen

## Aufgabe 2: Zustandsrückführung mit Eigenwertzuweisung (SIMO-Fall)

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Aufgaben:** a) Zeigen Sie, dass $-2$ und $-2 \pm \sqrt{1+\alpha}$ die Eigenwerte von $A$ sind

b) Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist das Zustandssystem

(i) asymptotisch stabil?

(ii) steuerbar?

c) Bestimmen Sie $(0,0,1) \cdot R(A,B)^{-1}$ für $\alpha = 0, \beta \neq 0$

a) Zeigen Sie, dass $-2$ und $-2 \pm \sqrt{1+\alpha}$ die Eigenwerte von $A$ sind

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+2 & -\beta \\ -\alpha & 0 & \lambda+3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 - \alpha\lambda + 11\lambda - 2\alpha + 6$$

$$(\lambda^3 + 6\lambda^2 - \alpha\lambda + 11\lambda - 2\alpha + 6) : (\lambda + 2) = \underbrace{\lambda^2 + 4\lambda + (3-\alpha)}$$

$$\lambda = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - (3-\alpha)}$$

$$= -2 \pm \sqrt{1+\alpha}$$

b) Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist das Zustandssystem (i) asymptotisch stabil?

alle EV neg. Realteil $\longrightarrow$ asymptotisch stabil

Einschränkung

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{1+\alpha}$$

$$\mathrm{Re}(-2 \pm \sqrt{1+\alpha}) = \begin{cases} -2+\sqrt{1+\alpha} & a \geq -1 \\ -2 & a < -1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}(\;.\;) < 0 \qquad \underline{\underline{a < 3}}$$

b) Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist das Zustandssystem (ii) steuerbar?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R(A,B) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -3+\alpha \\ 0 & \beta & -5\beta+\alpha\beta \\ 1 & -3+\alpha & 9-3\alpha \end{array}\right)$$

$$B \qquad A \cdot B \qquad A^2 \cdot B$$

$$\det R(A,B) \neq 0$$

$$\det R(A,B) = -3\beta + 4\alpha\beta - \alpha^2\beta = -\beta(\alpha^2 - 4\alpha + 3)$$

$$\beta = 0 \qquad \alpha = 1 \vee \alpha = 3$$

nicht steuerbar für $\beta = 0$ und $\alpha \in \{1, 3\}$, da $R(A,B)$ nicht vollen Rang

c) Bestimmen Sie $(0,0,1)\cdot R(A,B)^{-1}$ für $\underline{\alpha = 0}, \beta \neq 0$

$$K = -\underbrace{(0,0,1)\cdot R(A,B)^{-1}}\cdot p(A)$$ → Ackermann-Formel

$$R(A,B)^T \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \xi^T = (0,0,1)\cdot R(A,B)^{-1}$$

→ siehe Vorlesung

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \beta & -5\beta \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad R(A,B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & -3 \\ -3 & -5\beta & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & -3 & 0 \\ -3 & -5\beta & 9 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \xi$$

$$\Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\beta} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie $(0,0,1) \cdot R(A,B)^{-1}$ für $\alpha = 0, \beta \neq 0$

$$(0,0,1) \cdot R(A,B)^{-1} = \xi^T = \left( \frac{1}{3} \, , \, -\frac{1}{\beta} \, , \, -\frac{1}{3} \right)$$

## Aufgabe 2: Zustandsrückführung mit Eigenwertzuweisung (SIMO-Fall)

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Aufgaben:**

d) Geben Sie für den Fall $\alpha = 0, \beta \neq 0$ die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3x3}$ an (abhängig von $\beta$), sodass $(TAT^{-1}, T^{-1}B)$ der Regelungsnormalform entspricht

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von $\beta$), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A + BK)$ ist.
Welche Aussage über die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises lässt sich daraus schließen?

d) Geben Sie für den Fall $\underbrace{\alpha = 0}, \underbrace{\beta \neq 0}$ die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3x3}$ an (abhängig von $\beta$), sodass $(\overbrace{TAT^{-1}}, \overbrace{T^{-1}B})$ der Regelungsnormalform entspricht

$$T = \begin{bmatrix} v \\ v \cdot A \\ v \cdot A^2 \\ \vdots \\ v \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \qquad v = \xi^T$$

$$T = \begin{bmatrix} v \\ v \cdot A \\ v \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\beta} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{\beta} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{\beta} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

d) Geben Sie für den Fall $\alpha = 0, \beta \neq 0$ die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3x3}$ an (abhängig von $\beta$), sodass $(TAT^{-1}, T^{-1}B)$ der Regelungsnormalform entspricht

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \qquad TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von $\beta$), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A+BK)$ ist.

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & \beta & 3\beta \\ 1 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$K = -\underbrace{(0,0,1)\,R(A,B)^{-1}}\cdot \underline{p(A)}$$

$$p(A) = (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I) = (A+I)^3$$

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von $\beta$), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A+BK)$ ist.

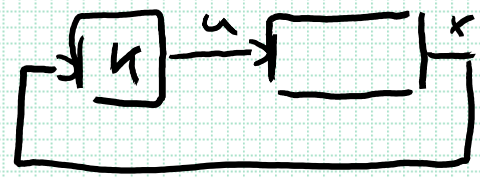
$$R(A,B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 5 \\ 5 & 3\beta & -15 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 5 & 0 \\ 5 & 3\beta & -15 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \xi$$

$$\xi^T = \left( \frac{1}{35}, \frac{1}{7\beta}, -\frac{1}{35} \right) = (0, 0, 1)\, R(A,B)^{-1}$$

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von $\beta$), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A + BK)$ ist.

$$K = -(0,0,1)\, R(A,B)^{-1} (A+I)^3$$




$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \beta \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A+I}^{3} = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 12 \\ -24\beta & -1 & 15\beta \\ 96 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K = -\left( \frac{1}{35}, \frac{1}{7\beta}, -\frac{1}{35} \right) \begin{pmatrix} -16 & 0 & 12 \\ -24\beta & -1 & 15\beta \\ 96 & 0 & -40 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\left( \frac{232}{35}, \frac{1}{7\beta}, -\frac{127}{35} \right)}}$$

e) Welche Aussage über die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises lässt sich daraus schließen?

→ geschl. Regelkreis

$$\dot{x} = \underline{(A + BK)}\,x$$

↳ EW werden gesetzt